第十七章　特殊三角形

17.1　等腰三角形

课时 1　等腰三角形与等边三角形的性质

刷基础

1. A　【解析】∵ 甲木条长 15 cm，乙木条长是甲木条长的 $\frac{2}{5}$，∴ 乙木条长 $15\times\frac{2}{5}=6$(cm). ∵ $6+6<15$，∴ 等腰三角形的腰长不可能是 6 cm，∴ 等腰三角形的腰长为 15 cm，∴ 等腰三角形的周长是 $15+15+6=36$(cm)，故选 A.

> **易错警示**　根据题意可知等腰三角形的两边长分别是 15 cm 和 6 cm，但没有明确哪一条是腰，哪一条是底边，所以有两种情况，要注意利用三角形的两边之和大于第三边进行检验.

2. 14　【解析】分两种情况讨论：
①若 8 cm 长的边为底边，设腰长为 x cm，则有 $x+x+8=36$，解得 $x=14$.
②若 8 cm 长的边为腰，设底边长为 y cm，则有 $8+8+y=36$，解得 $y=20$. 因为 $8+8<20$，所以不能构成三角形. 综上可知，这个等腰三角形的腰长为 14 cm，故答案为 14.

3. B　【解析】∵ $AB=AC$，$\angle BAC=130°$，∴ $\angle C=\angle B=\frac{180°-\angle BAC}{2}=25°$. ∵ $DA\perp AC$，∴ $\angle CAD=90°$，∴ $\angle ADB=\angle C+\angle CAD=115°$. 故选 B.

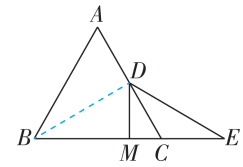
4. 100°　【解析】设 $\angle C=x$. ∵ $ED=EC$，∴ $\angle EDC=\angle C=x$，∴ $\angle DEA=\angle C+\angle EDC=2x$. ∵ $DA=DE$，∴ $\angle DAE=\angle DEA=2x$，∴ $\angle ADB=\angle C+\angle DAE=3x$. ∵ $AB=AD$，∴ $\angle B=\angle ADB=3x$. ∵ $\angle BAC=100°$，∴ $\angle B+\angle C=180°-\angle BAC=80°$，∴ $3x+x=80°$，解得 $x=20°$，∴ $\angle C=\angle EDC=20°$，$\angle ADB=3x=60°$，∴ $\angle ADE=180°-\angle EDC-\angle ADB=100°$. 故答案为 100°.

5. D　【解析】∵ $AC=BC$，$\angle A=35°$，∴ $\angle A=\angle B=35°$，∴ $\angle ACB=180°-35°-35°=110°$. 由作图可知，$CF$ 垂直于 AB，∴ CF 平分 $\angle ACB$，∴ $\angle BCG=\frac{1}{2}\angle ACB=55°$，故选 D.

6.【证明】(1) ∵ $AB=AE$，D 为线段 BE 的中点，∴ $AD\perp BC$，∴ $\angle C+\angle DAC=90°$. ∵ $\angle BAC=90°$，∴ $\angle BAD+\angle DAC=90°$，∴ $\angle C=\angle BAD$.
(2) ∵ $AF/\!/BC$，∴ $\angle FAE=\angle AEB$. ∵ $AB=AE$，∴ $\angle B=\angle AEB$，∴ $\angle B=\angle FAE$. 又∵ $\angle AEF=\angle BAC=90°$，$AB=AE$，∴ $\triangle ABC\cong\triangle EAF$ (ASA)，∴ $AC=EF$.

7. (1)【解】∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\angle ACB=60°$. ∵ $CE=CD$，∴ $\angle E=\angle CDE$. 又∵ $\angle ACB=\angle E+\angle CDE$，∴ $\angle E=\frac{1}{2}\angle ACB=30°$.

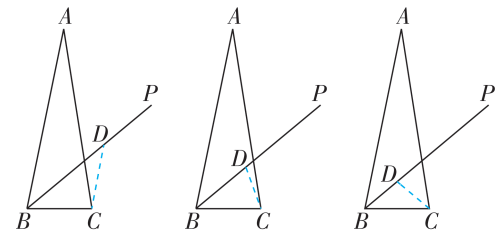
(2)【证明】如图，连接 BD. ∵ 等边 $\triangle ABC$ 中，D 是 AC 的中点，∴ BD 平分 $\angle ABC$，∴ $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$. 由(1)知 $\angle E=30°$，∴ $\angle E=\angle DBC$，∴ $BD=DE$. ∵ M 是 BE 的中点，∴ $DM\perp BE$.



刷易错

8. 40°或 70°或 100°　【解析】①当 $BC=CD$ 时，如图(1)所示. ∵ $\angle A=20°$，$AB=AC$，∴ $\angle ABC=80°$. ∵ BP 平分 $\angle ABC$，∴ $\angle CBD=40°$. ∵ $BC=CD$，∴ $\angle CBD=\angle BDC=40°$. ②当 $BD=BC$ 时，如图(2)所示. 由①可知 $\angle CBD=40°$. ∵ $BD=BC$，∴ $\angle BDC=70°$. ③当 $DB=DC$ 时，如图(3)所示. 由①可知 $\angle CBD=40°$. ∵ $BD=CD$，∴ $\angle BDC=100°$. 故答案为 40°或 70°或 100°.

> **易错警示**　本题中未指出腰，所以需要对腰进行分类讨论，避免漏解.



图(1)　图(2)　图(3)

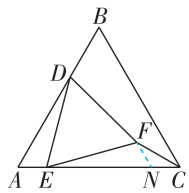
刷提升

1. C　【解析】在①处剪断时，$2+2<10$，不能构成三角形. 在②处剪断时，因为 $4+4>6$，所以可以围成边长为 4 厘米、4 厘米、6 厘米的等腰三角形. 在③处剪断时，因为 $4+5>5$，所以可以围成边长为 4 厘米、5 厘米、5 厘米的等腰三角形. 在④处剪断时，$4+3=7$，不能构成三角形. 综上可知，可以在②或③处剪断.

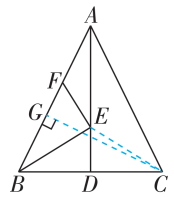
2. C　【解析】在 $\triangle CBA_1$ 中，$\angle B=40°$，$A_1B=CB$，∴ $\angle BA_1C=\frac{180°-\angle B}{2}=70°$. ∵ $A_1A_2=A_1D$，$\angle BA_1C$ 是 $\triangle A_1A_2D$ 的外角，∴ $\angle DA_2A_1=\frac{1}{2}\angle BA_1C=\frac{1}{2}\times70°$. 同理可得 $\angle EA_3A_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times70°$，∴ 第 n 个等腰三角形中，其中一个底角的度数是 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times70°$. 故选 C.

3. A　【解析】在 AC 上截取 $CN=AE$，连接 FN，如图. ∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\angle A=60°$，$AB=AC$. ∵ $BD=2AE$，∴ $AD=EN$. ∵ $\triangle DEF$ 是

等边三角形，∴ $DE=EF$，$\angle DEF=60°$. ∵ $\angle ADE=180°-\angle A-\angle AED=180°-60°-\angle AED=120°-\angle AED$，$\angle NEF=180°-\angle DEF-\angle AED=180°-60°-\angle AED=120°-\angle AED$，∴ $\angle ADE=\angle NEF$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle NEF$ 中，$\begin{cases}AD=EN,\\ \angle ADE=\angle NEF,\\ DE=EF,\end{cases}$ ∴ $\triangle ADE\cong\triangle NEF$（SAS），∴ $AE=FN$，$\angle FNE=\angle A=60°$，∴ $FN=CN$，∴ $\angle NCF=\angle NFC$. ∵ $\angle FNE=\angle NCF+\angle NFC=60°$，∴ $\angle NCF=30°$，即 $\angle ECF=30°$. 故当点 D 从点 A 向点 B 运动（不运动到点 B）时，$\angle ECF$ 的大小不变.



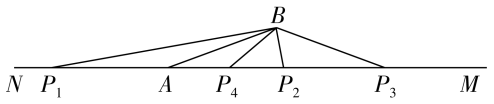
（第 3 题图）



（第 4 题图）

4. 10 【解析】∵ $AB=AC=13$，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，∴ $AD\perp BC$，$BD=DC$，∴ 点 B，C 关于 AD 所在直线对称. 过点 C 作 $CG\perp AB$ 于 G，连接 CE，如图. 由对称性可知 $CE=BE$，∴ $BE+EF=CE+EF\geqslant CG$，∴ 当 C，E，F 三点共线且该直线垂直于 AB 时，$BE+EF$ 的值最小，即为 CG 的长. ∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CG=\frac{1}{2}\times13\times CG=65$，∴ $CG=10$，即 $BE+EF$ 的最小值为 10.

5. 160°或 140°或 20° 【解析】如图，分情况讨论：

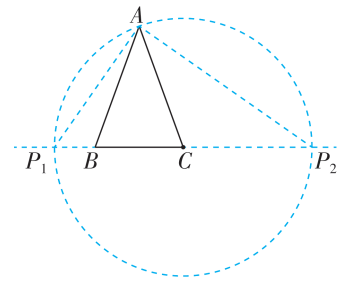


分类	分析
$AP_1=AB$	∵ $\angle BAM=20°$，∴ $\angle BAP_1=160°$，∴ $\triangle ABP_1$ 的顶角的度数是 160°
$AP_2=AB$	∵ $\angle BAM=20°$，∴ $\triangle ABP_2$ 的顶角的度数是 20°
$BP_3=AB$	∵ $\angle BAM=20°$，∴ $\angle BAP_3=\angle BP_3A=20°$，∴ $\angle ABP_3=140°$，∴ $\triangle ABP_3$ 的顶角的度数是 140°
$P_4A=P_4B$	∵ $\angle BAM=20°$，∴ $\angle BAP_4=\angle ABP_4=20°$，∴ $\angle AP_4B=140°$，∴ $\triangle ABP_4$ 的顶角的度数是 140°
综上所述，当 $\triangle ABP$ 是等腰三角形时，它的顶角的度数为 160°或 140°或 20°	

关键点拨 本题主要考查了等腰三角形的性质，同时要注意分类讨论思想的应用.

6. 15°或 75° 【解析】∵ $AB=AC$，$\angle ABC=70°$，∴ $\angle ACB=\angle ABC=70°$，∴ $\angle BAC=180°-\angle ACB-\angle ABC=180°-70°-70°=40°$. 如图所示，当点 P 在点 B 的左侧，即在点 P_1 的位置时，∵ $CA=CP_1$，∴ $\angle CAP_1=\angle CP_1A=\frac{180°-\angle ACP_1}{2}=\frac{180°-70°}{2}=55°$，∴ $\angle BAP_1=\angle CAP_1-\angle CAB=55°-40°=15°$. 当点 P 在点 C 的右侧，即在点 P_2 的位置时，∵ $CA=CP_2$，∴ $\angle CAP_2=\angle CP_2A=\frac{\angle ACB}{2}=\frac{70°}{2}=35°$，∴ $\angle BAP_2=\angle CAP_2+\angle CAB=35°+40°=75°$. 综上所述，$\angle BAP$ 的度数是 15°或 75°，故答案为 15°或 75°.

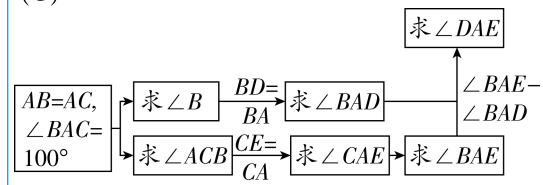
思路分析 根据等腰三角形的性质可以得到 $\triangle ABC$ 各内角的度数，然后根据题意画出图形，利用分类讨论的方法求出 $\angle BAP$ 的度数即可.



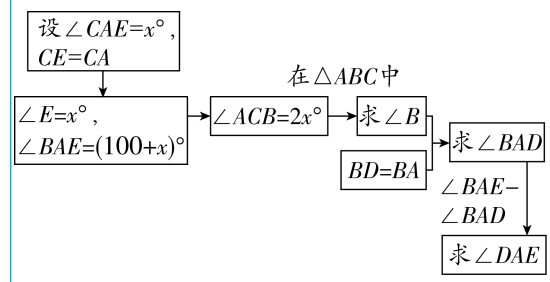
刷素养

7. **思路分析**

（1）



（2）①根据等腰三角形的性质逐步表示出∠DAE：



②仿照①的思路逐步求解.

【解】（1）∵ $AB=AC$，$\angle BAC=100°$，∴ $\angle B=\angle ACB=40°$. ∵ $BD=BA$，∴ $\angle BAD=\angle BDA=\frac{1}{2}(180°-\angle B)=70°$. ∵ $CE=CA$，点 E 在 BC 的延长线上，∴ $\angle CAE=\angle E=\frac{1}{2}\angle ACB=20°$，∴ $\angle BAE=\angle BAC+\angle CAE=120°$，∴ $\angle DAE=\angle BAE-\angle BAD=50°$. 故答案为 50.

（2）① $\angle DAE$ 的度数不会改变. 理由：设 $\angle CAE=x°$，则 $\angle BAE=(100+x)°$. ∵ $CE=CA$，∴ $\angle E=\angle CAE=x°$，∴ $\angle ACB=\angle E+\angle CAE=$

$2x°$. ∵ 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=100°$，∴ $\angle B=180°-\angle BAC-\angle ACB=(80-2x)°$. 又∵ $BD=BA$，∴ $\angle BAD=\angle BDA=\frac{1}{2}(180°-\angle B)=(50+x)°$，∴ $\angle DAE=\angle BAE-\angle BAD=(100+x)°-(50+x)°=50°$. 故 $\angle DAE$ 的度数不会改变.

②$\angle DAE=\frac{1}{2}\alpha$.

∵ $BD=BA$，∴ $\angle BAD=\angle BDA=\frac{1}{2}(180°-\angle B)$，∴ $\angle DAC=\angle BAC-\angle BAD=\alpha-\frac{1}{2}(180°-\angle B)=\alpha-90°+\frac{1}{2}\angle B$. ∵ $CE=CA$，∴ $\angle CAE=\angle E=\frac{1}{2}\angle ACB$，∴ $\angle DAE=\angle DAC+\angle CAE=\alpha-90°+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle ACB=\alpha-90°+\frac{1}{2}(180°-\alpha)=\frac{1}{2}\alpha$.

课时 2　等腰三角形与等边三角形的判定

刷基础

1. A　【解析】

A	三角形第三个角的度数为 180°−50°−35°=95°，∴ A 选项中的图形不是等腰三角形
B	三角形第三个角的度数为 180°−90°−45°=45°，∴ B 选项中的图形是等腰三角形
C	三角形第三个角的度数为 180°−100°−40°=40°，∴ C 选项中的图形是等腰三角形
D	三角形有两边长为 5，∴ D 选项中的图形是等腰三角形

2. B　【解析】∵ $\angle ACB=90°$，$\angle B=36°$，∴ $\angle A=54°$. ∵ $BC=BD$，∴ $\angle CDB=\angle DCB=72°$，∴ $\angle CED=72°$，∴ $\angle ECB=36°$，∴ $\angle ACE=54°$，∴ $CE=BE$，$AE=CE$，∴ $\triangle BCD$，$\triangle CDE$，$\triangle CEB$，$\triangle ACE$ 都是等腰三角形，故选 B.

3. B　【解析】∵ $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ 的平分线相交于点 D，∴ 根据角平分线的定义得，$\angle DBE=\angle DBC$，$\angle DCF=\angle DCB$. ∵ $EF/\!/BC$，∴ $\angle BDE=\angle DBC$，$\angle CDF=\angle DCB$，∴ $\angle BDE=\angle DBE$，$\angle CDF=\angle DCF$，∴ $DE=BE$，$DF=CF$，∴ $EF=DE+DF=BE+CF$. ∵ $\triangle ABC$ 的周长为 14，$BC=5$，∴ $AB+AC=14-5=9$，∴ $\triangle AEF$ 的周长为 $AE+EF+AF=AE+BE+CF+AF=AB+AC=9$.

4. 80°或 50°或 20°　【解析】∵ $\angle A=80°$，∴ ①当 $\angle B=80°$时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形；②当 $\angle B=(180°-80°)\div2=50°$时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形；③当 $\angle B=180°-80°\times2=20°$时，$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

5.【证明】∵ $AB=AC$，∴ $\angle B=\angle C$. ∵ $EP\perp BC$，∴ $\angle E+\angle C=90°$，$\angle B+\angle BFP=90°$，∴ $\angle E=\angle BFP$. ∵ $\angle BFP=\angle AFE$，∴ $\angle E=\angle AFE$，∴ $AE=AF$，∴ $\triangle AEF$ 是等腰三角形.

6. D　【解析】A 选项，有两个内角是 60°的三角形是等边三角形，不符合题意；B 选项，有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形，不符合题意；C 选项，腰和底相等的等腰三角形是等边三角形，不符合题意；D 选项，有两个角相等的等腰三角形不一定是等边三角形，符合题意. 故选 D.

7. A　【解析】∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，∴ $AB=BC=AC$，$\angle A=\angle B=\angle C=60°$. ∵ $AD=BE=CF$，∴ $AF=BD=CE$，∴ $\triangle ADF\cong\triangle BED\cong\triangle CFE$(SAS)，∴ $DF=ED=EF$，∴ $\angle DEF=\angle EFD=\angle FDE=60°$，∴ $\triangle DEF$ 是等边三角形.

8. 40　【解析】连接 BD. ∵ $CD=BC$，$\angle BCD=60°$，∴ $\triangle BCD$ 为等边三角形，∴ $BD=CD=40$ cm，故答案为 40.

9. (1)【证明】∵ $CD=CF$，∴ $\angle F=\angle CDF$.
∵ $\angle ADE=\angle CDF$，
∴ $\angle F=\angle ADE$.
∵ $DE\perp AB$，
∴ $\angle F+\angle B=90°$，$\angle ADE+\angle A=90°$，
∴ $\angle B=\angle A$，∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形.
(2)【解】当 $\angle F=30°$时，$\triangle ABC$ 是等边三角形. 证明如下：
∵ $DE\perp AB$，∴ $\angle B+\angle F=90°$，
∴ $\angle B=90°-30°=60°$.
由(1)知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，
∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

刷提升

1. C　【解析】∵ DE 的垂直平分线分别交 AC，BC 于点 F，G，∴ $FE=FD$，∴ $\triangle DEF$ 一定为等腰三角形，故①正确. ∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形，∴ $\angle B=\angle C=60°$. ∵ $DE\perp AB$，$DE\perp FG$，∴ $AB/\!/FG$，∴ $\angle FGC=\angle B=60°$，∴ $\triangle CFG$ 一定为等边三角形，故②正确. ∵ $\angle FDC>\angle FGC=60°$，$\angle C=60°$，$\angle CFD<\angle CFG=60°$，∴ $\triangle FDC$ 不可能为等腰三角形，故③错误. 故选 C.

2. 110°或 80°　【解析】分三种情况：①当 $AD=AE$ 时，$\angle ADE=\angle AED=40°$. ∵ $\angle AED$ 是 $\triangle DEC$ 的外角，∴ $\angle AED>\angle C=40°$，∴ 此种情况不存在. ②当 $AD=DE$ 时，$\angle DAE=\angle DEA=70°$. ∵ $\angle C=40°$，∴ $\angle BDA=\angle DAE+\angle C=110°$. ③当 $EA=ED$ 时，$\angle EAD=\angle ADE=40°$. ∵ $\angle C=40°$，∴ $\angle BDA=\angle EAD+\angle C=80°$. 综上所述，

刷有所得
根据等边三角形的定义可知，满足三边相等、有一内角为 60°且两边相等或有两个内角为 60°中任意一个条件的三角形都是等边三角形.

关键点拨
掌握三角形内角和定理和等腰三角形的判定是解题的关键.

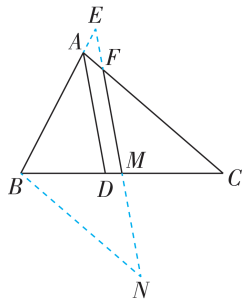
思路分析
(1)由 $CD=CF$，得到 $\angle F=\angle CDF$，由垂直的定义得到 $\angle F+\angle B=90°$，$\angle ADE+\angle A=90°$，进而得到 $\angle B=\angle A$，即可证明结论；
(2)由垂直的定义得到 $\angle B=90°-30°=60°$. 由(1)知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，于是可证 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

$\angle BDA$ 的度数是 110°或 80°.

3. 12

添加辅助线

延长线段构造全等三角形,将已知线段转移到同一个三角形中. 本题可以延长 FM 到 N,使 $MN=MF$,连接 BN,延长 MF 交 BA 的延长线于 E,从而利用等腰三角形的判定将角之间的关系转化为线段之间的关系,进而可得出答案.



【解析】如图,延长 FM 到 N,使 $MN=MF$,连接 BN,延长 MF 交 BA 的延长线于 E. ∵ M 是 BC 中点,∴ $BM=CM$. 在 $\triangle BMN$ 和 $\triangle CMF$ 中,

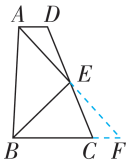
$$\begin{cases} BM=CM, \\ \angle BMN=\angle CMF, \\ MN=MF, \end{cases}$$

∴ $\triangle BMN\cong\triangle CMF$(SAS),∴ $BN=CF$,$\angle N=\angle MFC$. ∵ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,∴ $\angle BAD=\angle CAD$. 又∵ $MF/\!/AD$,∴ $\angle E=\angle BAD=\angle CAD=\angle CFM=\angle AFE=\angle N$,∴ $AE=AF$,$BN=BE$,∴ $AB+AC=AB+AF+FC=AB+AE+FC=BE+FC=BN+FC=2FC$. ∵ $AB=8$,$CF=10$,∴ $AC=2FC-AB=20-8=12$. 故答案为 12.

4. (1)【解】$\triangle ACE$ 是等腰三角形. 理由:在长方形 $ABCD$ 中,$DC/\!/AB$,∴ $\angle ACD=\angle BAC$. 由折叠的性质可得 $\angle BAC=\angle B'AC$,∴ $\angle ACD=\angle B'AC$,∴ $AE=CE$,∴ $\triangle ACE$ 是等腰三角形.

(2)【解】$BD=DE+CE$. 理由:∵ BO 平分 $\angle ABC$,CO 平分 $\angle ACG$,$DO/\!/BC$,∴ $\angle OBC=\angle OBD=\angle BOD$,$\angle OCG=\angle ECO=\angle EOC$,∴ $BD=OD$,$CE=OE$,∴ $BD=DO=DE+EO=DE+CE$.

(3)【证明】如图,延长 AE 交 BC 的延长线于 F. ∵ $AD/\!/BC$,∴ $\angle F=\angle DAE$,$\angle D=\angle ECF$. ∵ AE 平分 $\angle BAD$,∴ $\angle BAF=\angle DAF$,∴ $\angle BAF=\angle F$,∴ $BA=BF$. ∵ E 是 CD 的中点,∴ $DE=CE$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中,



$$\begin{cases} \angle DAE=\angle CFE, \\ \angle ADE=\angle FCE, \\ DE=CE, \end{cases}$$

∴ $\triangle ADE\cong\triangle FCE$(AAS),∴ $AE=EF$,∴ 点 E 是 AF 的中点,∴ $BE\perp AE$.

刷素养

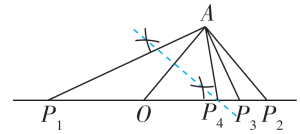
5.【解】(1)如图(1),①$AO=OP_1$,②$AO=AP_2$,③$AO=OP_3$,④$AP_4=OP_4$,故这样的等腰三角形能画 4 个. 故答案为 4.

技巧总结

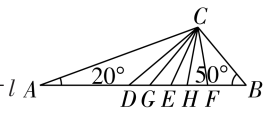
在解决与等腰三角形相关的问题时,若遇到没有明确腰和底边的题目一定要考虑分类讨论,还应验证各种情况是否能构成三角形.

思路分析

设这个三角形的底角的度数为 x,分两种情况:①底角是顶角的 2 倍;②顶角是底角的 2 倍,再根据三角形的内角和定理求解即可.



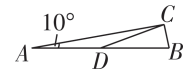
图(1)



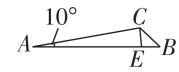
图(2)

(2)如图(2),①$AC=AF$,②$BC=BE$,③$CB=CG$,④$AD=CD$,⑤$BH=HC$,故过顶点 C 作一条直线,把该三角形分割出一个小等腰三角形,这样的直线最多可以画 5 条. 故答案为 5.

(3)如图(3),当 $AD=CD$ 时,$\angle ACD=\angle A=10°$,∴ $\angle CDB=20°$,∴ ①当 $CD=BD$ 时,$\angle B=\angle BCD=80°$;②当 $CD=BC$ 时,$\angle B=\angle CDB=20°$;③当 $BD=BC$ 时,$\angle B=180°-20°-20°=140°$. 如图(4),当 $AC=AE$,$CE=BE$ 时,∵ $\angle A=10°$,∴ $\angle ACE=\angle AEC=85°$,∴ $\angle B=\angle BCE=42.5°$. 如图(5),当 $AC=CF$,$CF=BF$ 时,∵ $\angle A=10°$,∴ $\angle AFC=\angle A=10°$,∴ $\angle B=5°$. 综上所述,$\angle B$ 的度数为 80°或 20°或 140°或 42.5°或 5°.



图(3)



图(4)

图(5)

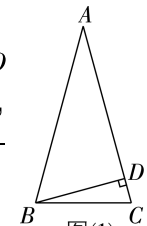
重难专题 4　等腰三角形中的分类讨论问题

刷难关

1. 10 或 11　【解析】∵ $(a-3)^2+|b-4|=0$,∴ $a-3=0$,$b-4=0$,∴ $a=3$,$b=4$. 分两种情况:①当等腰三角形的腰长为 3,底边长为 4 时,这个等腰三角形的周长为 $3+3+4=10$;②当等腰三角形的腰长为 4,底边长为 3 时,这个等腰三角形的周长为 $3+4+4=11$. 综上所述,这个等腰三角形的周长为 10 或 11,故答案为 10 或 11.

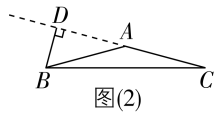
2. 72°或 45°　【解析】设这个三角形的底角的度数为 x. 由题意分以下两种情况:①这个三角形的三个角的度数分别为 x,x,$\frac{x}{2}$,由三角形的内角和定理得 $x+x+\frac{x}{2}=180°$,解得 $x=72°$;②这个三角形的三个角的度数分别为 x,x,$2x$,由三角形的内角和定理得 $x+x+2x=180°$,解得 $x=45°$,故答案为 72°或 45°.

3. C　【解析】分两种情况讨论:①如图(1),当腰 AC 上的高 BD 在 $\triangle ABC$ 内部时. ∵ $BD\perp AC$,∴ $\angle ADB=90°$,∴ $\angle BAD=180°-90°-60°=30°$. ∵ $AB=AC$,∴ $\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-$



图(1)

30°)=75°. ②如图(2),当腰 AC 上的高 BD 在 $\triangle ABC$ 外部时. ∵ $BD\perp AC$, ∴ $\angle ADB=90°$, ∴ $\angle BAD=180°-90°-60°=30°$. ∵ $AB=AC$, ∴ $\angle ABC=\angle ACB$.

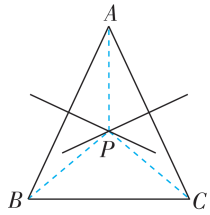


图(2)

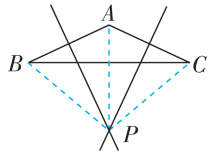
∵ $\angle BAD=\angle ABC+\angle ACB$, ∴ $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle BAD=15°$. 综上所述,这个等腰三角形底角的度数为 75°或 15°. 故选 C.

▶关键点拨　注意分两种情况讨论:①当 BD 在 $\triangle ABC$ 内部时;②当 BD 在 $\triangle ABC$ 外部时.

4. C　【解析】分两种情况:当点 P 在 $\triangle ABC$ 内部时,如图(1),连接 AP, BP, PC. 因为 AB 和 AC 的垂直平分线交于点 P,所以 $PA=PB=PC$,所以 $\angle BAP=\angle ABP$, $\angle PBC=\angle PCB$, $\angle PAC=\angle ACP$. 因为 $\angle BPC=100°$,所以 $\angle PBC+\angle PCB=180°-\angle BPC=80°$. 因为 $\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB=180°$,所以 $\angle ABP+\angle BAP+\angle ACP+\angle CAP=180°-(\angle PBC+\angle PCB)=100°$,所以 $2\angle BAP+2\angle CAP=100°$,所以 $\angle BAP+\angle CAP=50°$,所以 $\angle BAC=50°$. 当点 P 在 $\triangle ABC$ 外部时,如图(2),连接 AP, BP, PC. 因为 AB 和 AC 的垂直平分线交于点 P,所以 $PA=PB=PC$,所以 $\angle BAP=\angle ABP$, $\angle PAC=\angle ACP$. 因为 $\angle BPC=100°$,所以 $\angle ABP+\angle BAP+\angle CAP+\angle ACP=360°-\angle BPC=260°$,所以 $2\angle BAP+2\angle CAP=260°$,所以 $\angle BAP+\angle CAP=130°$,所以 $\angle BAC=130°$. 综上所述,等腰三角形的顶角为 50°或 130°. 故选 C.

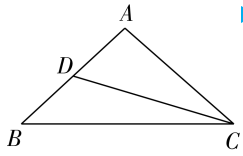


图(1)



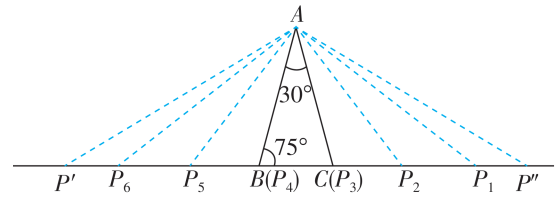
图(2)

5. 15　【解析】如图,已知等腰 $\triangle ABC$,设 $AB=AC=x$ cm. 当 $AD+AC-(BD+BC)=5$ 时,即 $\frac{1}{2}x+x-\left(\frac{1}{2}x+10\right)=5$,解得 $x=15$. 以 15,15,10 为边长能够组成三角形. 当 $BC+BD-(AD+AC)=5$ 时,即 $10+\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{2}x+x\right)=5$,解得 $x=5$. 以 5,5,10 为边长不能组成三角形. 故这个三角形的腰长为15 cm. 故答案为 15.



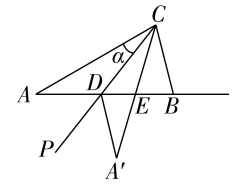
▶关键点拨　对题目中"其中一部分比另一部分长 5 cm"进行分类讨论是解决此题的关键.

6. C　【解析】∵ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=75°$, $\angle BAC=30°$, ∴ $\angle ACB=180°-\angle ABC-\angle BAC=180°-75°-30°=75°$. 如图,当 $\angle CAP_1=\angle CP_1A=\frac{1}{2}\times75°=37.5°$时, $\triangle CAP_1$ 为等腰三角形. 当 $\angle BAP_2=\angle BP_2A=\frac{1}{2}\times(180°-75°)=52.5°$时, $\triangle BAP_2$ 为等腰三角形. 当 $\angle P''AB=\angle P''BA=75°$时, $\triangle P''AB$ 为等腰三角形. 当 P_3 与 C 重合时, $\triangle ABP_3$ 为等腰三角形. 当 P_4 与 B 重合时, $\triangle ACP_4$ 为等腰三角形. 当 $\angle P'AC=\angle P'CA=75°$时, $\triangle P'AC$ 为等腰三角形. 当 $\angle CAP_5=\angle CP_5A=\frac{1}{2}\times(180°-75°)=52.5°$时, $\triangle CAP_5$ 为等腰三角形. 当 $\angle BAP_6=\angle BP_6A=\frac{1}{2}\times75°=37.5°$时, $\triangle BAP_6$ 为等腰三角形. 综上,满足条件的点 P 的位置有 8 个. 故选 C.



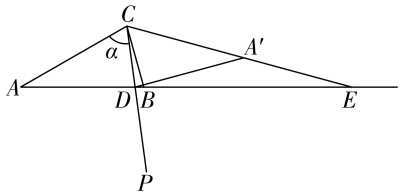
7. 10°或 25°或 40°　【解析】∵ $\angle AOB=80°$, OC 平分 $\angle AOB$, ∴ $\angle AOC=\frac{1}{2}\angle AOB=40°$. ∵ $ME\perp OA$, ∴ $\angle EMO=90°$, ∴ $\angle OEM=50°$. ①当 $\angle EMF=\angle MEF=50°$时, $\angle OMN=90°-\angle EMF=90°-50°=40°$;②当 $\angle EMF=\angle MFE$ 时, $\angle EMF=\frac{1}{2}(180°-\angle OEM)=\frac{1}{2}\times(180°-50°)=65°$,则 $\angle OMN=90°-\angle EMF=90°-65°=25°$;③当 $\angle MFE=\angle MEF=50°$时, $\angle EMF=180°-\angle MEF-\angle MFE=180°-50°-50°=80°$,则 $\angle OMN=90°-\angle EMF=90°-80°=10°$. 综上, $\angle OMN$ 的度数为 10°或 25°或 40°,故答案为 10°或 25°或 40°.

8. 22.5°或 67.5°或 45°　【解析】∵ $\angle A=30°$, $AB=AC$, ∴ $\angle ACB=\angle ABC=75°$. 由折叠得 $\angle ACD=\angle A'CD=\alpha=\frac{1}{2}\angle ACA'$, $\angle A=\angle DA'C=30°$. 分四种情况:①当 $A'D=A'E$,且 $A'C$ 在 BC 左侧时,如图(1),则 $\angle A'DE=\angle A'ED=\frac{1}{2}(180°-\angle A')=75°$. ∵ $\angle A'ED$ 是 $\triangle ACE$ 的一个外角, ∴ $\angle ACE=\angle A'ED-\angle A=45°$, ∴ $\alpha=\frac{1}{2}\angle ACE=22.5°$.



图(1)

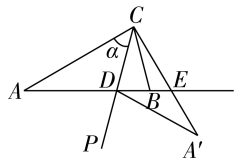
②当 $A'D=A'E$，且 $A'C$ 在 BC 右侧时，如图(2)，则 $\angle A'DE=\angle A'ED=\frac{1}{2}\angle CA'D=15°$，$\therefore \angle ACA'=180°-\angle A-\angle A'EA=135°$，$\therefore \alpha=\frac{1}{2}\angle ACA'=67.5°$.



图(2)

③当 $DA'=DE$ 时，$\angle A'=\angle DEA'=30°$. $\because \angle DEA'$ 是 $\triangle ACE$ 的一个外角，$\therefore \angle DEA'>30°$，$\therefore$ 此种情况不成立.

④当 $ED=EA'$ 时，如图(3)，则 $\angle EDA'=\angle A'=30°$，$\therefore \angle DEA'=180°-\angle EDA'-\angle A'=120°$.



图(3)

$\because \angle A'ED$ 是 $\triangle ACE$ 的一个外角，$\therefore \angle ACE=\angle A'ED-\angle A=90°$，$\therefore \alpha=\frac{1}{2}\angle ACE=45°$.

综上所述，当 α 的值为 22.5°或 67.5°或 45°时，$\triangle A'DE$ 是等腰三角形. 故答案为 22.5°或 67.5°或 45°.

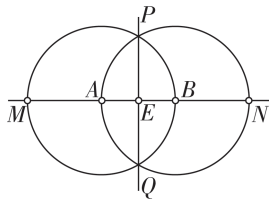
9. D

方法技巧 | "两圆一中垂"构造等腰三角形

已知两点 A,B，找一点 C 使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

分类讨论：

若 $AB=AC$，则点 C 在以点 A 为圆心，线段 AB 的长为半径的圆上；

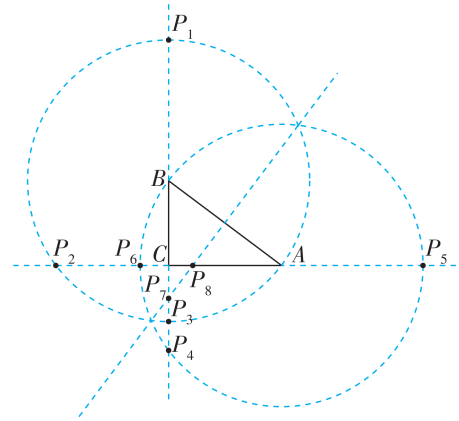


若 $BA=BC$，则点 C 在以点 B 为圆心，线段 AB 的长为半径的圆上；

若 $CA=CB$，则点 C 在线段 AB 的垂直平分线上，如图所示. 以上简称"两圆一中垂".

"两圆一中垂"上的点能构成等腰三角形，但是要除去原有的点 A,B，还要除去因共线无法构成三角形的点(共除去 5 个点).

【解析】如图，以 B,A 为圆心，AB 长为半径作圆分别交 BC,AC 所在直线于点 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6，再作 AB 的垂直平分线与 BC,AC 所在直线交于点 P_7,P_8，所以符合条件的点 P 有 8 个，故选 D.



10. 25°或 40°或 10° 【解析】由题意知 $\triangle ABD$ 与 $\triangle DBC$ 均为等腰三角形，对于 $\triangle ABD$ 可能有 ① $AB=BD$，此时 $\angle ADB=\angle A=80°$，$\therefore \angle BDC=180°-\angle ADB=180°-80°=100°$，$\therefore \angle C=\frac{1}{2}(180°-100°)=40°$；② $AB=AD$，此时 $\angle ADB=\frac{1}{2}(180°-\angle A)=\frac{1}{2}(180°-80°)=50°$，$\therefore \angle BDC=180°-\angle ADB=180°-50°=130°$，$\therefore \angle C=\frac{1}{2}(180°-130°)=25°$；③ $AD=BD$，此时 $\angle ADB=180°-2\times 80°=20°$，$\therefore \angle BDC=180°-\angle ADB=180°-20°=160°$，$\therefore \angle C=\frac{1}{2}(180°-160°)=10°$. 综上所述，$\angle C$ 的度数可以为 25°或 40°或 10°. 故答案为 25°或 40°或 10°.

思路分析 分 $AB=AD$，$AB=BD$，$AD=BD$ 三种情况，分别根据等腰三角形的性质求出 $\angle ADB$，再求出 $\angle BDC$，进而求得 $\angle C$.

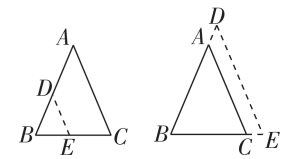
思路分析 根据折叠的性质可得 $\angle ACD=\angle A'CD=\alpha=\frac{1}{2}\angle ACA'$，$\angle A=\angle DA'C=30°$，然后分情况讨论，再分别进行计算即可解答.

大招专题 7 等腰三角形中常见辅助线的作法

刷难关

大招解读 | 作平行线法

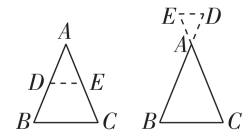
【模型】作腰的平行线.



【条件】$AB=AC$，$DE/\!/AC$.

【结论】$DB=DE$.

【模型】作底边的平行线.

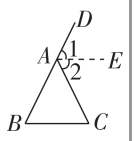


【条件】$AB=AC$，$DE/\!/BC$.

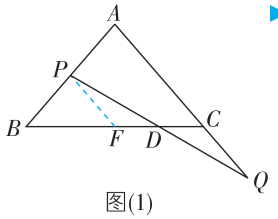
【结论】$AD=AE$.

续表

【模型】过顶点作底边的平行线.
【条件】$AB=AC$，点 D 在 BA 延长线上，$AE/\!/BC$.
【结论】$\angle 1=\angle 2$.



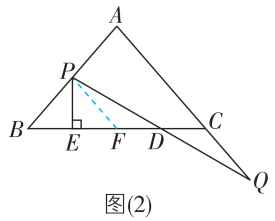
1. (1)【证明】过 P 点作 $PF/\!/AC$ 交 BC 于 F，如图(1). 因为点 P 和点 Q 同时出发，且速度相同，所以 $BP=CQ$. 因为 $PF/\!/AQ$，所以 $\angle PFB=\angle ACB$，$\angle DPF=\angle DQC$. 因为 $AB=AC$，所以 $\angle B=\angle ACB$，所以 $\angle B=\angle PFB$，所以 $BP=PF$，所以 $PF=CQ$. 因为 $\angle PDF=\angle QDC$，$\angle DPF=\angle DQC$，$PF=CQ$，所以 $\triangle PFD\cong\triangle QCD$，所以 $PD=QD$.



图(1)

▶关键点拨　过 P 点作 $PF/\!/AQ$ 交 BC 于 F. 构造等腰三角形 PBF，证得 $\triangle DPF\cong\triangle DQC$ 是本题解题的关键.

(2)【解】存在，ED 的长度保持不变. 理由如下：
过点 P 作 $PF/\!/AQ$ 交 BC 于点 F，如图(2).
由(1)知 $PB=PF$.
因为 $PE\perp BF$，所以 $BE=EF$.
由(1)知 $\triangle PFD\cong\triangle QCD$，所以 $FD=DC$，
所以 $ED=EF+FD=BE+DC=\frac{1}{2}BC$，
所以 ED 的长度保持不变.



图(2)

2. 思路分析

仔细观察图形

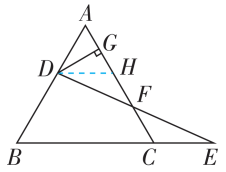
要证明 $AD=CE$ → 联想证三角形全等 → 已有 $FE=FD$，$\angle AFD=\angle CFE$ → 作辅助线，构造等角

▶关键点拨　作辅助线，构造全等三角形是解题的关键.

(1)【证明】如图，过点 D 作 $DH/\!/BC$ 交 AC 于点 H，则 $\angle DHF=\angle ECF$.
在 $\triangle DHF$ 和 $\triangle ECF$ 中，

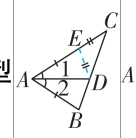
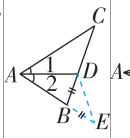
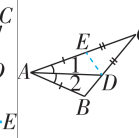
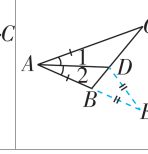
$$\begin{cases}\angle DHF=\angle ECF,\\ \angle HFD=\angle CFE,\\ DF=EF,\end{cases}$$

$\therefore\triangle DHF\cong\triangle ECF$，
$\therefore DH=CE$. $\because\triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore\angle ABC=\angle A=\angle ACB=60^\circ$. $\because DH/\!/BC$，$\therefore\angle ADH=\angle ABC=60^\circ$，$\angle AHD=\angle ACB=60^\circ$，$\therefore\triangle ADH$ 是等边三角形，$\therefore AD=DH$. $\because DH=CE$，$\therefore AD=CE$.

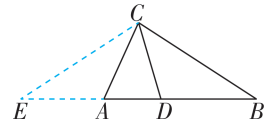


(2)【解】GF 的长是定值. 如图，由(1)知，$\triangle DHF\cong\triangle ECF$，$\therefore FH=FC=\frac{1}{2}CH$.
$\because\triangle ABC$ 和 $\triangle ADH$ 是等边三角形，$\therefore AC=AB=2$，$AD=AH$，$\therefore CH=BD$，$\therefore FH=\frac{1}{2}BD$. $\because DG\perp AH$，$\therefore AG=HG=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}AD$，$\therefore FG=HG+HF=\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}(AD+BD)=\frac{1}{2}AB=1$.

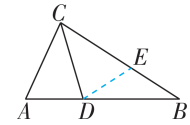
大招解读 | 截长补短

	截长法	补短法	截长法	补短法
模型				
条件	$\angle 1=\angle 2$，$\angle ABC=2\angle C$		$\angle 1=\angle 2$，$\angle ABC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle C$	
方法	在 AC 上截取 $AE=AB$，连接 DE	延长 AB 至点 E，使 $BE=BD$，连接 DE	在 AC 上截取 $AE=AB$，连接 DE	延长 AB 至点 E，使 $AE=AC$，连接 DE
结论	$AC=AB+BD$		$AC=AB+CD$	

3.【证明】方法1(补短法)：如图(1)，延长 BA 至点 E，使 $AE=AC$，连接 CE，则 $\angle E=\angle ACE$，$\therefore\angle CAB=\angle E+\angle ACE=2\angle E=2\angle B$，$\therefore\angle ACE=\angle E=\angle B$，$\therefore CE=CB$. $\because CD$ 平分 $\angle ACB$，$\therefore\angle ACD=\angle BCD$，$\therefore\angle ACD+\angle ACE=\angle BCD+\angle B$，即 $\angle ECD=\angle EDC$，$\therefore CE=DE=AE+AD=AC+AD$，$\therefore BC=AC+AD$.



图(1)

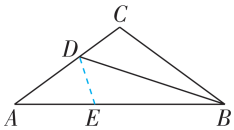


图(2)

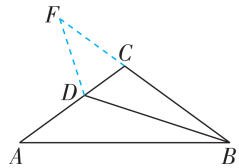
方法2(截长法)：如图(2)，在 BC 上取一点 E，连接 DE，使得 $\angle EDB=\angle B$，则 $DE=BE$，$\angle CED=\angle B+\angle EDB=2\angle B=\angle A$. $\because CD$ 平分 $\angle ACB$，$\therefore\angle ACD=\angle DCE$. 又 $\because CD=CD$，$\therefore\triangle ACD\cong\triangle ECD$，$\therefore AD=DE=BE$，$CE=AC$，$\therefore BC=CE+BE=AC+AD$.

4.【证明】方法1(截长法)：如图(1)，在 AB 上截取 $BE=BC$，连接 ED. $\because CA=CB$，$\therefore\angle A=\angle ABC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ACB)=36^\circ$. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore\angle ABD=\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=18^\circ$. 又 $\because BE=BC$，$BD=BD$，$\therefore\triangle CBD\cong\triangle EBD$ (SAS)，$\therefore\angle BED=\angle ACB=108^\circ$，$\therefore\angle AED=72^\circ$，$\therefore\angle ADE=180^\circ-\angle A-\angle AED=72^\circ=$

$\angle AED$，$\therefore AD=AE$，$\therefore AB=AE+BE=AD+BC$.



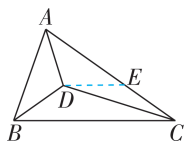
图(1)



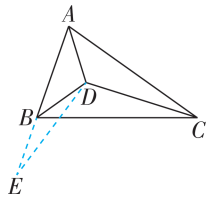
图(2)

方法2(补短法)：如图(2)，延长 BC 至点 F，使 $BF=AB$，连接 FD. $\because CA=CB$，$\therefore \angle A=\angle ABC=\frac{1}{2}(180°-\angle ACB)=36°$. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle ABD=\angle FBD$. 又 $\because BD=BD$，$\therefore \triangle ABD\cong\triangle FBD$(SAS)，$\therefore AD=FD$，$\angle F=\angle A=36°$，$\therefore \angle FDC=\angle ACB-\angle F=72°$. 又 $\because \angle FCD=180°-\angle ACB=72°$，$\therefore \angle FCD=\angle FDC$，$\therefore FC=FD=AD$，$\therefore AB=FB=FC+BC=AD+BC$.

5.【证明】方法1(截长法)：如图(1)，在 AC 上截取 AE，使 $AE=AB$，连接 DE，则 $AB+CE=AE+CE=AC=AB+BD$，$\therefore CE=BD$. $\because AD,BD,CD$ 分别平分 $\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$，$\therefore \angle DAB=\angle DAE$，$\angle ABC=2\angle ABD$，$\angle ACB=2\angle ACD$. 又 $\because AD=AD$，$\therefore \triangle ABD\cong\triangle AED$(SAS)，$\therefore BD=DE$，$\angle ABD=\angle AED$，$\therefore DE=CE$，$\therefore \angle EDC=\angle ECD$，$\therefore \angle ABD=\angle AED=\angle EDC+\angle ECD=2\angle ECD=\angle ACB$，$\therefore \angle ABC=2\angle ACB$.



图(1)



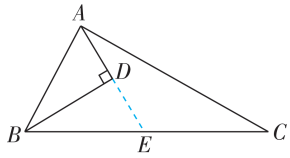
图(2)

方法2(补短法)：如图(2)，延长 AB 到点 E，使 $BE=BD$，连接 DE，则 $AE=AB+BE=AB+BD=AC$，$\angle E=\angle BDE$，$\therefore \angle ABD=\angle E+\angle BDE=2\angle E$. $\because AD,BD,CD$ 分别平分 $\angle BAC$，$\angle ABC$，$\angle ACB$，$\therefore \angle DAE=\angle DAC$，$\angle ABC=2\angle ABD$，$\angle ACB=2\angle ACD$. 又 $\because AD=AD$，$\therefore \triangle AED\cong\triangle ACD$(SAS)，$\therefore \angle E=\angle ACD$，$\therefore \angle ABD=2\angle ACD=\angle ACB$，$\therefore \angle ABC=2\angle ACB$.

大招解读 | 作延长线

【模型】角平分线+垂线构造全等三角形.

【条件】BD 平分 $\angle ABC$，$BD\perp AD$.



【结论】(1) $\triangle ABD\cong\triangle EBD$；(2) $AD=DE$；(3) $BA=BE$.

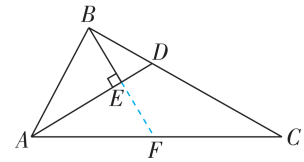
6.【证明】如图，延长 BE 交 AC 于点 F，则 $\angle AEB=\angle AEF=90°$.

思路分析 延长 AB，CD 交于点 E，证明 $\triangle ADE\cong\triangle ADC$，得到 $\angle E=\angle ACD$，$DE=CD=4$，$AE=AC$，从而可得 $CE=8$，再利用同角的补角相等得到 $\angle E=\angle ACD=\angle CBE$，即可求解.

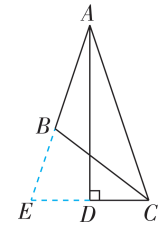
$\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle BAE=\angle FAE$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AFE$ 中，$\begin{cases}\angle AEB=\angle AEF,\\ AE=AE,\\ \angle BAE=\angle FAE,\end{cases}$

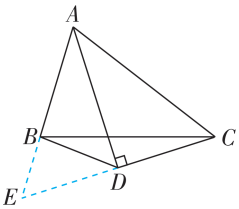
$\therefore \triangle ABE\cong\triangle AFE$(ASA)，$\therefore \angle ABF=\angle AFB$，$AB=AF$，$BE=EF$. $\because \angle C+\angle CBF=\angle AFB=\angle ABF$，$\angle ABF+\angle CBF=\angle ABC=3\angle C$，$\therefore \angle C+2\angle CBF=3\angle C$，$\therefore \angle CBF=\angle C$，$\therefore BF=CF$，$\therefore BE=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}CF$. $\because CF=AC-AF=AC-AB$，$\therefore BE=\frac{1}{2}(AC-AB)$.



7. 8 【解析】延长 AB，CD 交于点 E，如图. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle EAD=\angle CAD$. $\because CD\perp AD$，$\therefore \angle ADE=\angle ADC=90°$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADC$ 中，$\begin{cases}\angle EAD=\angle CAD,\\ AD=AD,\\ \angle ADE=\angle ADC,\end{cases}$ $\therefore \triangle ADE\cong\triangle ADC$，$\therefore \angle E=\angle ACD$，$DE=CD=4$，$AE=AC$，$\therefore CE=8$. $\because \angle ABC+\angle ACD=180°$，$\angle ABC+\angle CBE=180°$，$\therefore \angle E=\angle ACD=\angle CBE$，$\therefore BC=CE=8$，故答案为8.



8.【解】如图，延长 CD，AB 交于点 E. $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，$CD\perp AD$，$\therefore \angle EAD=\angle CAD$，$\angle ADE=90°=\angle ADC$. 又 $\because AD=AD$，$\therefore \triangle EAD\cong\triangle CAD$(ASA)，$\therefore AE=AC$，$DE=CD$，$\therefore BD$ 为 $\triangle BCE$ 的中线，$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCE}$. $\because AC-AB=4$，$\therefore BE=AE-AB=4$，$\therefore$ 当 $BE\perp BC$ 时，$S_{\triangle BCE}$ 最大，即 $S_{\triangle BCD}$ 最大，此时 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times10\times4=10$.



17.2 直角三角形

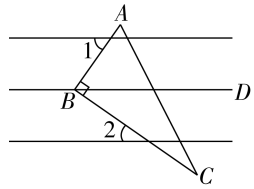
刷基础

1. C 【解析】因为 $\angle 1+\angle BCD=\angle ACB=90°$，所以 $\angle 1$ 与 $\angle BCD$ 互余. 因为 $CD\perp AB$，所以 $\angle CDA=90°$，所以 $\angle 1+\angle A=90°$，所以 $\angle 1$ 与 $\angle A$ 互余.

关键点拨 利用等量代换得出 $\angle CBF=\angle C$ 是解题关键.

2. C 【解析】如图所示. $\because$ 一组平行线穿过

$\triangle ABC$，$\therefore$ $\angle ABD=\angle 1$，$\angle DBC=\angle 2$，$\therefore \angle ABC=\angle ABD+\angle CBD=\angle 1+\angle 2$. $\because \angle ABC=90°$，$\angle 1=55°$，$\therefore \angle 2=90°-55°=35°$，故选 C.



3. 15　【解析】设较小锐角的度数为 x，则较大锐角的度数为 $x+60°$. 根据题意，得 $x+x+60°=90°$，解得 $x=15°$，$\therefore$ 较小锐角的度数为 15°. 故答案为 15.

4. D　【解析】

A	$\angle A+\angle B=\angle C$，则 $2\angle C=180°$，$\angle C=90°$，$\triangle ABC$ 为直角三角形，故 A 选项不符合题意
B	$\angle A-\angle B=\angle C$，则 $2\angle A=180°$，$\angle A=90°$，$\triangle ABC$ 为直角三角形，故 B 选项不符合题意
C	$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，则 $\angle C=\frac{3}{1+2+3}\times 180°=90°$，$\triangle ABC$ 为直角三角形，故 C 选项不符合题意
D	$\angle A=\angle B=3\angle C$，则 $7\angle C=180°$，三个角均不等于 90°，$\triangle ABC$ 不是直角三角形，故 D 选项符合题意

5. A　【解析】连接 OP. 根据题意知，点 P 是 Rt$\triangle AOB$ 斜边的中点，$\therefore OP$ 是 Rt$\triangle AOB$ 斜边上的中线，$\therefore OP=\frac{1}{2}AB$. $\because AB$ 的长度不变，$\therefore OP$ 的长度不变. 故选 A.

技巧总结　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

6. 45°　【解析】$\because \angle ACD=3\angle BCD$，$\angle ACB=90°$，$\therefore \angle BCD=22.5°$. $\because CD\perp AB$，$\therefore \angle B=90°-\angle BCD=90°-22.5°=67.5°$. 又 $\because E$ 是斜边 AB 的中点，$\therefore BE=CE$，$\therefore \angle BCE=\angle B=67.5°$，$\therefore \angle ECD=\angle BCE-\angle BCD=67.5°-22.5°=45°$. 故答案为 45°.

7. (1)【证明】$\because AB=AC$，AD 为 BC 上的中线，$\therefore AD\perp BC$，

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90°$，

$\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形.

$\because$ 点 F 为 AB 中点，$\therefore FD=\frac{1}{2}AB=AF=BF$.

$\because BE\perp AC$，$\therefore \angle AEB=90°$，

$\therefore \triangle ABE$ 是直角三角形.

$\because$ 点 F 为 AB 中点，$\therefore EF=\frac{1}{2}AB=AF=BF$，

$\therefore EF=FD$.

(2)【解】由题意易得 $\angle BAD=\angle CAD$.

$\because \angle BAC=50°$，$\therefore \angle BAD=\angle CAD=25°$.

$\because \angle ADB=90°$，$\therefore \angle ABC=65°$.

由(1)知 $FD=AF=BF$，$\therefore \angle ADF=\angle BAD$，

$\therefore \angle ADF=\angle CAD$，$\therefore AC/\!/DF$.

$\because BE\perp AC$，$\therefore BE\perp DF$.

$\because EF=BF$，$\therefore \angle FBE=\angle FEB$，$DF$ 垂直平分 BE，$\therefore BD=DE$，$\therefore \angle EBD=\angle BED$，$\therefore \angle FED=\angle FEB+\angle BED=\angle FBE+\angle DBE=\angle ABC=65°$.

8. A　【解析】$\because$ 在等边 $\triangle ABC$ 中，D 是 AB 的中点，$AB=8$，$\therefore AC=8$，$AD=4$，$\angle A=60°$. $\because DE\perp AC$ 于 E，$\therefore \angle ADE=90°-\angle A=90°-60°=30°$，

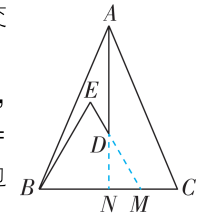
$\therefore AE=\frac{1}{2}AD=2$，$\therefore CE=AC-AE=6$，故选 A.

刷有所得　含 120° 角的等腰三角形的两个底角是 30°，含 30° 角的直角三角形的斜边和 30° 角所对的直角边有倍分关系.

9.【证明】在 $\triangle ABC$ 中，$\because AB=AC$，$\angle BAC=120°$，$\therefore \angle B=\angle C=30°$. 又 $\because AD\perp AC$，$\therefore \angle DAC=90°$，$\therefore \angle BAD=\angle BAC-\angle DAC=30°$，$CD=2AD$. $\because \angle BAD=\angle B=30°$，$\therefore AD=DB$，$\therefore BC=CD+BD=2AD+AD=3AD$.

刷提升

1. D　【解析】如图，延长 ED 交 BC 于 M，延长 AD 交 BC 于 N. $\because AB=AC$，AD 平分 $\angle BAC$，$\therefore AN\perp BC$，$BN=CN$. $\because \angle EBC=\angle E=60°$，$\therefore \triangle BEM$ 为等边三角形，$\therefore EM=BM=BE$，$\angle EMB=60°$. $\because BE=6$ cm，$DE=2$ cm，$\therefore DM=4$ cm. $\because AN\perp BC$，$\therefore \angle DNM=90°$，$\therefore \angle NDM=90°-\angle EMB=30°$，$\therefore NM=2$ cm，$\therefore BN=4$ cm，$\therefore BC=2BN=8$ cm. 故选 D.



2. B　【解析】$\because \angle C=90°$，$\angle CFD=60°$，$\therefore \angle CDF=30°$，$\therefore \angle FDB=180°-\angle CDF=150°$. $\because \triangle FDE$，$\triangle BDE$ 关于 DE 对称，$\therefore \angle DFE=\angle B$，$\angle FED=\angle BED$，$\angle FDE=\angle BDE=75°$. 设 $\angle B=x°$，则 $\angle DFE=x°$，$\angle A=90°-x°$，$\therefore \angle AFE=180°-60°-x°=120°-x°$，$\angle FED=\angle BED=180°-75°-x°=105°-x°$，$\therefore \angle AEF=180°-\angle FED-\angle BED=2x°-30°$. $\because \triangle AEF$ 中有两个内角相等，$\therefore$ 只有 $\angle AEF=\angle AFE$ 或 $\angle A=\angle AEF$ 这两种情况. 当 $\angle AEF=\angle AFE$ 时，$2x-30=120-x$，$\therefore x=50$，$\therefore \angle A=90°-x°=40°$；当 $\angle A=\angle AEF$ 时，$90-x=2x-30$，$\therefore x=40$，$\therefore \angle A=90°-x°=50°$. 综上，$\angle A=40°$ 或 50°. 故选 B.

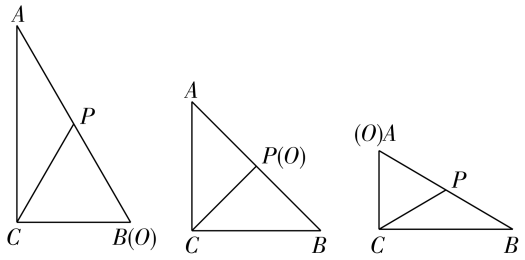
3. B　【解析】设 $\angle ABD=\beta$，则 $\angle BDC=\angle ABD+\angle A=\beta+\alpha$. $\because DE\perp AB$，$\therefore \angle BED=90°$，$\therefore \angle BDE=90°-\beta$. $\because O$ 为 BD 中点，$\therefore OE=\frac{1}{2}BD=OD$，$\therefore \angle OED=\angle ODE$. 同理得 $OC=OD$，$\therefore \angle OCD=\angle ODC=\alpha+\beta$，$\therefore \angle EOD=180°-$

$2(90°-\beta)=2\beta$，$\angle COD=180°-2(\alpha+\beta)=180°-2\alpha-2\beta$，$\therefore \angle EOF=180°-\angle EOD-\angle COD=180°-2\beta-(180°-2\alpha-2\beta)=2\alpha$. 故选 B.

4. 5 【解析】$\because AB=AC$，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，$\therefore AD\perp BC$，$\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 120°=60°$. $\because AE$ 是 $\angle CAD$ 的平分线，$\therefore \angle DAE=\angle EAC=\frac{1}{2}\angle CAD=\frac{1}{2}\times 60°=30°$. $\because DF/\!/AC$，$\therefore \angle F=\angle CAE=30°$，$\therefore \angle DAE=\angle F=30°$，$\therefore AD=DF$. $\because \angle C=90°-60°=30°$，$\therefore AD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 10=5$，$\therefore DF=5$.

5. $30\leqslant n\leqslant 60$ 且 $n\neq 45$ 【解析】$\because \angle ACB=90°$，当 $OC=CP=\frac{1}{2}AB$（O，P 两点不重合）时，点 O 和 P 必有一点为斜边 AB 的中点，设 P 为 AB 的中点. 如图(1)，当点 O 与 B 重合时，$\because OC=CP=\frac{1}{2}AB=PB$，$\therefore \triangle CPB$ 是等边三角形，$\therefore \angle B=60°$，$\therefore n=30$；如图(2)，当 P 与 O 重合时，$n=45$，不符合题意；如图(3)，当 O 与 A 重合时，$\because OC=PC=\frac{1}{2}AB=AP$，$\therefore \triangle APC$ 是等边三角形，$\therefore n=60$. 综上，$\therefore n$ 的取值范围为 $30\leqslant n\leqslant 60$ 且 $n\neq 45$. 故答案为 $30\leqslant n\leqslant 60$ 且 $n\neq 45$.

思路分析 先根据已知确定点 O 和 P 必有一点为斜边 AB 的中点，再分三种情况，分别画出图形，结合等边三角形的判定即可解答.



图(1)　　图(2)　　图(3)

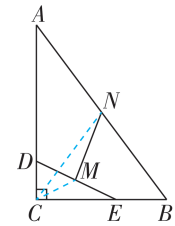
6.【解】(1)$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，BD 是 $\angle ABC$ 的平分线，$\therefore \angle EBP=\angle PBC=30°$. $\because PE\perp AB$ 于 E，$\therefore \angle BEP=90°$，$\therefore PE=\frac{1}{2}BP$. $\because QF$ 为线段 BP 的垂直平分线，$\therefore BP=2BQ=2\times 2=4$，$\therefore PE=\frac{1}{2}\times 4=2$.

(2)$\triangle EFP$ 是直角三角形. 理由如下：$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，BD 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle ABP=\angle CBD=30°$. $\because PE\perp AB$，$\therefore \angle PEB=90°$，$\therefore \angle BPE=60°$. $\because FQ$ 垂直平分线段 BP，$\therefore FB=FP$，$\therefore \angle FBQ=\angle FPQ=30°$，$\therefore \angle EPF=\angle EPB+\angle BPF=90°$，$\therefore \triangle EFP$ 是直角三角形.

刷素养

思路分析 根据直角三角形斜边中线的性质求得 $CN=\frac{1}{2}AB=5$，$CM=\frac{1}{2}DE=2$. 由 $MN\geqslant CN-CM$ 知，当点 C，M，N 在同一直线上时，MN 取得最小值，即可求得 MN 的最小值为 3.

7. 3 【解析】如图，连接 CM，CN. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=10$，$\because DE=4$，点 M，N 分别是 DE，AB 的中点，$\therefore CN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 10=5$，$CM=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\times 4=2$. $\because MN\geqslant CN-CM$，$\therefore$ 当点 C，M，N 在同一直线上时，MN 取得最小值，$\therefore MN$ 的最小值为 $CN-CM=5-2=3$. 故答案为 3.

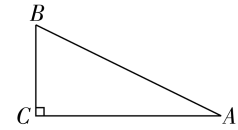


17.3 勾股定理

课时 1 勾股定理

刷基础

1. B 【解析】如图所示，$\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C=90°$，$AB=\sqrt{2}$，$\therefore BC^2+AC^2=AB^2=(\sqrt{2})^2=2$，$\therefore AB^2+BC^2+AC^2=AB^2+AB^2=2+2=4$，故选 B.



2. B 【解析】根据题图易得 $S_{\triangle ABC}=3\times 4-\frac{1}{2}\times 1\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 3=4$，由勾股定理易得 $AC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$\therefore AC$ 边上的高为 $\frac{2S_{\triangle ABC}}{AC}=\frac{2\times 4}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，故选 B.

3. C 【解析】由勾股定理，得正方形 A、B 下面的正方形的面积为 $3^2+5^2=34$，正方形 C、D 下面的正方形的面积为 $2^2+3^2=13$，$\therefore$ 最大的正方形 E 的面积为 $34+13=47$. 故选 C.

关键点拨 得到 $\triangle EFC$ 为直角三角形是本题解题的关键.

4. B 【解析】$\because CE$ 平分 $\angle ACB$，CF 平分 $\angle ACD$，$\therefore \angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB$，$\angle ACF=\frac{1}{2}\angle ACD$，$\therefore \angle ECF=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ACD)=90°$，$\therefore \triangle EFC$ 为直角三角形. 又 $\because EF/\!/BC$，CE 平分 $\angle ACB$，CF 平分 $\angle ACD$，$\therefore \angle ECB=\angle MEC=\angle ECM$，$\angle DCF=\angle CFM=\angle MCF$，$\therefore CM=EM=MF=5$，$\therefore EF=10$. 由勾股定理可知 $CE^2+CF^2=EF^2=100$.

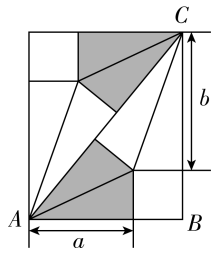
5. 69 【解析】在 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle ADC$ 中，$BD^2=AB^2-AD^2$，$CD^2=AC^2-AD^2$. 在 Rt$\triangle BDM$ 和 Rt$\triangle CDM$ 中，$BM^2=BD^2+MD^2=AB^2-AD^2+MD^2$，$MC^2=CD^2+MD^2=AC^2-AD^2+MD^2$，

$\therefore MC^2-MB^2=(AC^2-AD^2+MD^2)-(AB^2-AD^2+MD^2)=AC^2-AB^2=13^2-10^2=69$. 故答案为 69.

6.【解】在 Rt△ACD 中，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，$\therefore BD=BC-CD=6$. 在 Rt△$ABD$ 中，$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$.

7. D　【解析】①$S_{梯形}=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=\frac{1}{2}(a+b)^2$，$S_{梯形}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2=ab+\frac{1}{2}c^2$，$\therefore \frac{1}{2}(a+b)^2=ab+\frac{1}{2}c^2$，整理得 $a^2+b^2=c^2$，故①满足题意；②没有体现直角三角形斜边的长度，故②不符合题意；③无法证明直角三角形三边关系，故③不符合题意；④$S_{正方形}=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$S_{正方形}=4\times\frac{1}{2}ab+c^2=2ab+c^2$，$\therefore a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$，$\therefore a^2+b^2=c^2$，故④满足题意. 故选 D.

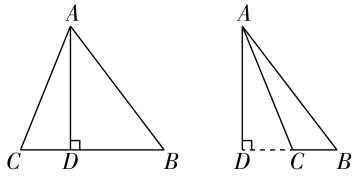
8. 80　【解析】如图，设小正方形的边长为 x，则 $AB=a+x$，$BC=b+x$. $\because a=5$，$b=8$，$\therefore AC=5+8=13$. 在 Rt△ABC 中，$AC^2=AB^2+BC^2$，即 $13^2=(5+x)^2+(8+x)^2$，整理得 $x^2+13x=40$，$\therefore$ 该长方形的面积为 $(5+x)(8+x)=x^2+13x+40=40+40=80$. 故答案为 80.



刷易错

9. 4 或 14　【解析】①如图(1)，在锐角三角形 ABC 中，$AC=13$，$AB=15$，BC 边上的高 $AD=12$. 在 Rt△ACD 中，$\because AC=13$，$AD=12$，$\therefore CD^2=AC^2-AD^2=13^2-12^2=25$，$\therefore CD=5$. 在 Rt△$ABD$ 中，$\because AB=15$，$AD=12$，$\therefore BD^2=AB^2-AD^2=15^2-12^2=81$，$\therefore BD=9$，$\therefore BC$ 的长为 $BD+DC=9+5=14$.

②如图(2)，在钝角三角形 ABC 中，$AC=13$，$AB=15$，BC 边上的高 $AD=12$. 在 Rt△ACD 中，$\because AC=13$，$AD=12$，由勾股定理得 $CD^2=AC^2-AD^2=13^2-12^2=25$，$\therefore CD=5$. 在 Rt△$ABD$ 中，$\because AB=15$，$AD=12$，由勾股定理得 $BD^2=AB^2-AD^2=15^2-12^2=81$，$\therefore BD=9$，$\therefore BC$ 的长为 $DB-CD=9-5=4$. 综上所述，△ABC 中 BC 边的长为 4 或 14.



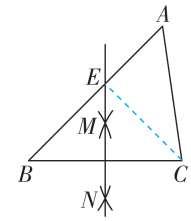
图(1)　　图(2)

关键点拨　掌握勾股定理并能熟练运用是解题的关键，要牢记运用勾股定理的前提是在直角三角形中.

刷提升

1. C　【解析】由折叠的性质可得 $DE=BE$. 设 $AE=x$ cm，则 $BE=DE=(9-x)$ cm. 在长方形 $ABCD$ 中，$\angle A=90°$，$\therefore$ 在 Rt△ABE 中，由勾股定理得 $AB^2+AE^2=BE^2$，$\therefore x^2+3^2=(9-x)^2$，解得 $x=4$，$\therefore AE=4$ cm，$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot AE=\frac{1}{2}\times3\times4=6(\text{cm}^2)$，故选 C.

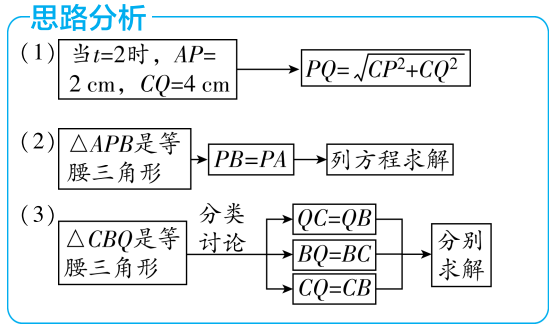
2. 7　【解析】由作图可知 MN 垂直平分线段 BC，如图，连接 CE，$\therefore BE=CE=4$，$\therefore \angle BCE=\angle B=45°$，$\therefore \angle AEC=\angle BCE+\angle B=45°+45°=90°$. 在 Rt△$CAE$ 中，$AC=5$，$CE=4$，$\therefore AE^2=AC^2-CE^2=5^2-4^2=3^2$，则 $AE=3$，$\therefore AB=BE+AE=7$. 故答案为 7.



思路分析　由作图可知 MN 垂直平分线段 BC，由线段垂直平分线的性质可得 $BE=CE$，从而可得 $\angle BCE=\angle B=45°$，由三角形外角的性质可得 $\angle AEC=90°$，在 Rt△ACE 中，由勾股定理可得 AE 的长，进而可得 AB 的长.

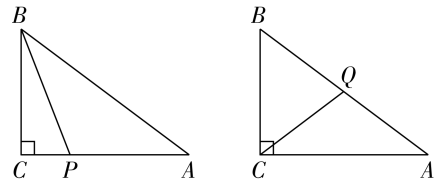
3. (1)$2\sqrt{13}$ cm　(2)$\frac{25}{4}$ s　(3)5.5 或 6 或 $\frac{33}{5}$

思路分析



【解析】(1)当 $t=2$ 时，$AP=2$ cm，$CQ=4$ cm，$\therefore CP=AC-AP=8-2=6$(cm). 在 Rt△$CPQ$ 中，$PQ=\sqrt{CP^2+CQ^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$(cm)，即 PQ 的长为 $2\sqrt{13}$ cm.

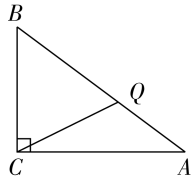
(2)如图(1)，当 $PB=PA$ 时，△APB 是等腰三角形，此时 $PA=t=PB$，则 $PC=8-t$. 在 Rt△CBP 中，由勾股定理得 $BC^2+PC^2=PB^2$，即 $6^2+(8-t)^2=t^2$，解得 $t=\frac{25}{4}$. 故答案为 $\frac{25}{4}$ s.



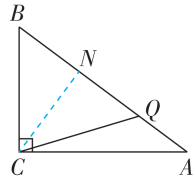
图(1)　　图(2)

(3)①如图(2)，若 $QC=QB$，则 $\angle B=\angle BCQ$. $\because \angle B+\angle A=\angle BCQ+\angle ACQ=90°$，$\therefore \angle A=\angle ACQ$，$\therefore AQ=CQ=BQ$. 在 Rt△$ABC$ 中，$BA=\sqrt{BC^2+CA^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$(cm)，$\therefore AQ=BQ=5$ cm，即 $2t-6=5$，解得 $t=5.5$.

②如图(3)，若 $BQ=BC$，则 $2t-6=6$，解得 $t=6$.



图(3)



图(4)

③如图(4),若 $CQ=CB$,过点 C 作 $CN\perp AB$,垂足为 N,则 $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CN$. $\because BA=10$ cm,$\therefore \frac{1}{2}\times8\times6=\frac{1}{2}\times10\times CN$,解得 $CN=\frac{24}{5}$,$\therefore$ 在 Rt△CBN 中,$BN=\sqrt{BC^2-CN^2}=\sqrt{6^2-\left(\frac{24}{5}\right)^2}=\frac{18}{5}$(cm),$\therefore BQ=\frac{36}{5}$ cm,即 $2t-6=\frac{36}{5}$,解得 $t=\frac{33}{5}$. 综上所述,当运动时间为 5.5 s 或 6 s 或 $\frac{33}{5}$ s 时,△CBQ 为等腰三角形.

刷素养

4.【解】【初步运用】(1)由题意得 $c^2=a^2+b^2=52$,$\therefore$ 空白部分的面积为 $52-2\times\frac{1}{2}\times4\times6=28$. 故答案为 28.

(2)$24\div4=6$,设 $AC=x$. 依题意有 $(x+3)^2+3^2=(6-x)^2$,解得 $x=1$,则 $\frac{1}{2}\times(3+1)\times3\times4=\frac{1}{2}\times4\times3\times4=24$. 故该风车状图案的面积是 24.

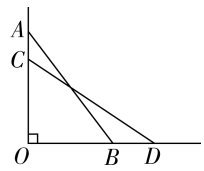
(3)将四边形 $MTKN$ 的面积设为 x,将其余八个全等三角形中一个三角形的面积设为 y. $\because$ 正方形 $ABCD$,正方形 $EFGH$,正方形 $MNKT$ 的面积分别为 S_1,S_2,S_3,$S_1+S_2+S_3=40$,$\therefore S_1=8y+x$,$S_2=4y+x$,$S_3=x$,$\therefore S_1+S_2+S_3=3x+12y=40$,$\therefore x+4y=\frac{40}{3}$,$\therefore S_2=x+4y=\frac{40}{3}$. 故答案为 $\frac{40}{3}$.

【迁移运用】结论:$a^2+b^2-ab=c^2$. 推导过程:由题意得大等边三角形的面积=三个全等三角形的面积+小等边三角形的面积,即 $\frac{1}{2}(a+b)\times k(a+b)=3\times\frac{1}{2}\times b\times ka+\frac{1}{2}\times c\times ck$,$\therefore (a+b)^2=3ab+c^2$,$\therefore a^2+b^2-ab=c^2$.

课时 2　勾股定理的应用

刷基础

1. B　【解析】依照题意画出示意图,如图所示. 在 Rt△AOB 中,$OB=3$ m,$AB=5$ m,$\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=4$ m. 在

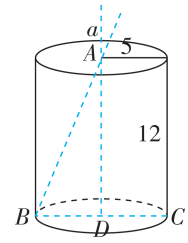


Rt△COD 中,$OC=OA-AC=3$ m,$CD=AB=5$ m,$\therefore OD=\sqrt{CD^2-OC^2}=4$ m,$\therefore BD=OD-OB=4-3=1$(m).

2. A　【解析】依题意,得 $AC=24$ cm,$BC=7$ cm,在 Rt△ABC 中,$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=25$ cm. $\because AB=AD=25$ cm,$DE=20$ cm,$\therefore$ 在 Rt△ADE 中,$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{25^2-20^2}=15$(cm),故选 A.

关键点拨　要从实际问题中正确抽象出几何图形,根据已知条件正确求出相关线段的长度.

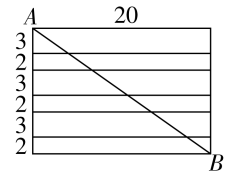
3. B　【解析】如图,设 BC 为饮料罐的下底面直径,D 为下底面圆心,A 为上底面圆心,作射线 BA,射线 DA,则 $AD\perp BC$,$AD=12$,$BD=CD=5$. $\because \angle ADB=90°$,$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$. 当吸管底端与点 B 重合时,露在罐外部分的长度最短,此时 $a=16-13=3$;当吸管底端与点 D 重合时,露在罐外部分的长度最长,此时 $a=16-12=4$,$\therefore a$ 的取值范围是 $3\leqslant a\leqslant4$. 故选 B.



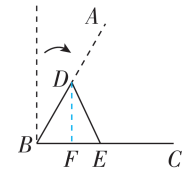
思路分析　(1)根据空白部分的面积=小正方形的面积-2 个直角三角形的面积计算即可.
(2)可设 $AC=x$,根据勾股定理列出方程可求 x,再根据直角三角形面积公式计算即可求解;
(3)将四边形 $MTKN$ 的面积设为 x,将其余八个全等三角形中一个三角形的面积设为 y,从而用 x,y 表示出 S_1,S_2,S_3,即可得出答案.
【迁移运用】根据大等边三角形的面积=三个全等三角形面积+小等边三角形的面积,构建关系式即可求解.

4. 8.5　【解析】设 $AC=x$ m,则 $AE=AC=x$ m,$\therefore AB=AE-BE=(x-1)$ m. 由题意得 $\angle ABC=90°$,在 Rt△ABC 中,$AB^2+BC^2=AC^2$,即 $(x-1)^2+4^2=x^2$,解得 $x=8.5$,$\therefore AC=8.5$ m. 故答案为 8.5.

5. 25　【解析】如图,三级台阶平面展开图为长方形,长为 20 dm,宽为 $(3+2)\times3=15$(dm),则蚂蚁沿着台阶面从 A 点爬行到 B 点的最短路程是此长方形的对角线长,即 $\sqrt{20^2+15^2}=25$(dm). 故答案为 25.



(第 5 题图)

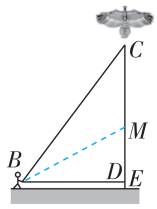


(第 6 题图)

6. $\frac{21}{8}$　【解析】如图,过点 D 作 $DF\perp BC$ 于 F. 设 $BD=x$ 米,则 $DE=AD=(5-x)$ 米. 在 Rt△BDF 中,$\angle DBF=60°$,$\therefore \angle BDF=30°$,$\therefore BF=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}x$ 米,$\therefore$ 由勾股定理得,$DF=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 米,$EF=\left(2-\frac{1}{2}x\right)$ 米. 在 Rt△DFE 中,由勾股定理

得 $DE^2=DF^2+EF^2$，即 $(5-x)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(2-\frac{1}{2}x\right)^2$，解得 $x=\frac{21}{8}$，即 BD 的长是 $\frac{21}{8}$ 米. 故答案为 $\frac{21}{8}$.

7.【解】(1)在 Rt△CDB 中，由勾股定理得，$CD^2=BC^2-BD^2=25^2-15^2=400$. 因为 $CD>0$，所以 $CD=20$ 米，



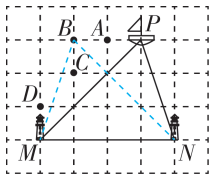
所以 $CE=CD+DE=20+1=21$(米).

答：风筝的垂直高度 CE 为 21 米.

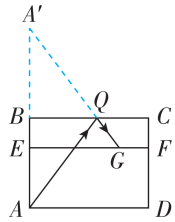
(2)如图，设风筝沿 CD 方向下降 12 米的位置为点 M，连接 BM，则 $CM=12$ 米，∴ $DM=8$ 米，∴ $BM=\sqrt{DM^2+BD^2}=\sqrt{8^2+15^2}=17$(米)，∴ $BC-BM=25-17=8$(米)，∴ 他应该往回收线 8 米.

刷提升

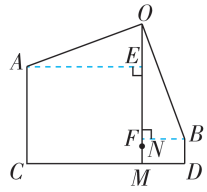
1. B　**【解析】**如图，连接 MB，NB，设小正方形边长为 1，则 $NB=MP=3\sqrt{2}$，$PN=BM=\sqrt{10}$. ∵ $MN=NM$，∴ △BMN ≌ △PNM (SSS)，∴ ∠MPN=∠MBN. ∵ 当船航行到点 P 的位置时，一定无触礁危险，∴ 当船处于点 B 的位置时，也一定无触礁危险，故选 B.



2. 100　**【解析】**如图所示，作点 A 关于 BC 的对称点 A'，连接 $A'G$ 交 BC 于点 Q，小虫沿着 $A\to Q\to G$ 的路线爬行时路程最短，此时 $AQ+QG=A'Q+QG=A'G$，即最短路程为 $A'G$ 的长. ∵ $A'B=AB=60$ cm，$AE=40$ cm，∴ $BE=20$ cm，∴ $A'E=80$ cm. 在 Rt△$A'EG$ 中，$A'E=80$ cm，$EG=60$ cm，∴ $A'G^2=A'E^2+EG^2=10\ 000$，∴ $A'G=100$ cm，∴ 最短路线长为 100 cm. 故答案为100.



3. 2　**【解析】**如图，过点 A 作 $AE\perp OM$ 于点 E，过点 B 作 $BF\perp OM$ 于点 F. ∵ ∠AOE+∠BOF=∠BOF+∠OBF=90°，∴ ∠AOE=∠OBF. 在



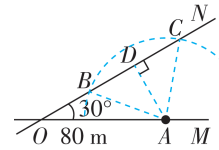
△AOE 和△OBF 中，∵ $\begin{cases}\angle OEA=\angle BFO,\\ \angle AOE=\angle OBF,\\ OA=BO,\end{cases}$

∴ △AOE≌△OBF(AAS)，∴ $OE=BF$，$AE=OF$，即 $OE+OF=BF+AE=CD=17$ 米.

∵ $EF=EM-FM=AC-BD=10-3=7$(米)，$OE+OF=2EO+EF=17$ 米，∴ $2EO=10$ 米，∴ $OE=5$ 米，∴ $OF=12$ 米，∴ $OM=OF+FM=15$ 米. ∵ 由勾股定理得 $ON=OA=\sqrt{OE^2+AE^2}=13$ 米，∴ $MN=15-13=2$(米). 即人物在荡绳索过程中离地面的最低点的高度 MN 为 2 米.

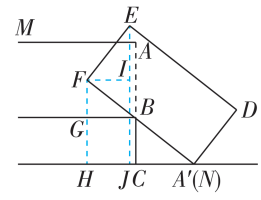
思路分析　作 $EJ\perp A'C$，$FH\perp A'C$，分别交 $A'C$ 的延长线于点 J，H，FH 交点 B 所在的水平直线于点 G，作 $FI\perp EJ$ 于点 I. 根据“两条平行线之间的距离处处相等”可知 $IJ=FH$，$GH=BC$，设 $A'B=AB=x$ m，根据勾股定理求出 x，再证明△BGF≌△$A'CB$，得 $FG=BC$，$BG=A'C$，则 $IJ=FH=FG+GH$，再证明△EIF≌△BGF，得 $EI=BG$，根据 $EJ=EI+IJ$ 得到答案.

4.【解】(1)如图，过点 A 作 $AD\perp ON$ 于点 D. ∵ ∠NOM=30°，$AO=80$ m，∠ADO=90°，∴ $AD=40$ m，即卡车 P 离学校 A 最近时，卡车 P 与学校 A 的距离为 40 m.



(2)会. 以点 A 为圆心，图中 50 m 的长度为半径画弧，分别交 ON 于 B，C 两点，连接 AB，AC. 在 Rt△ABD 中，$AB=50$ m，$AD=40$ m，由勾股定理得 $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=\sqrt{50^2-40^2}=30$(m)，同理可得 $DC=30$ m，故 $BC=60$ m，∴ 卡车 P 在经过 BC 段时对学校 A 产生影响. ∵ 重型运输卡车 P 的速度为 18 km/h=300 m/min，∴ 重型运输卡车 P 经过 BC 段时需要 60÷300=0.2(min)=12(s)，∴ 卡车 P 沿公路 ON 方向行驶一次给学校 A 带来噪声影响的时间为 12 s.

5.【解】如图，作 $EJ\perp A'C$，$FH\perp A'C$，分别交 $A'C$ 的延长线于点 J，H，FH 交点 B 所在的水平直线于点 G，作



$FI\perp EJ$ 于点 I. ∵ $AC\perp A'C$，$GB\perp AC$，∴ $FH/\!/EJ/\!/AB$，$FI/\!/BG/\!/A'C$，∴ $IJ=FH$，$GH=BC$，∠EIF=∠BGF=∠CHG=∠$A'CB$=90°，∠FBG=∠$BA'C$. 设 $A'B=AB=x$ m. ∵ $A'C^2+BC^2=A'B^2$，且 $AC=4$ m，$A'C=2$ m，∴ $2^2+(4-x)^2=x^2$，解得 $x=2.5$，∴ $A'B=2.5$ m，$GH=BC=4-2.5=1.5$(m). ∵ 四边形 $A'DEF$ 是长方形，$ED=5$ m，$EF=2.5$ m，∴ $A'F=ED=5$ m，

$\therefore EF=BF=A'B=2.5$ m. 在 $\triangle BGF$ 和 $\triangle A'CB$ 中，$\begin{cases}\angle BGF=\angle A'CB,\\ \angle FBG=\angle BA'C,\\ BF=A'B,\end{cases}$ $\therefore \triangle BGF\cong\triangle A'CB$(AAS)，$\therefore FG=BC=1.5$ m，$BG=A'C=2$ m，$\therefore IJ=FH=FG+GH=1.5+1.5=3$(m). $\because \angle BFE=90°$，$\angle IFH=180°-\angle CHG=90°$，$\therefore \angle EFI=\angle BFG=90°-\angle BFI$. 在 $\triangle EIF$ 和 $\triangle BGF$ 中，$\begin{cases}\angle EIF=\angle BGF,\\ \angle EFI=\angle BFG,\\ EF=BF,\end{cases}$ $\therefore \triangle EIF\cong\triangle BGF$(AAS)，$\therefore EI=BG=2$ m，$\therefore EJ=EI+IJ=2+3=5$(m)，$\therefore$ 木箱上部顶点 E 到地面 $A'C$ 的距离为 5 m.

课时 3　勾股定理的逆定理

刷基础

1. A　【解析】

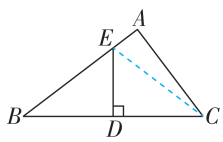
选项	分析	能否构成直角三角形
A	$3^2+4^2=25=5^2$	能
B	$1^2+2^2=5\neq3^2$	不能
C	$3^2+3^2=18\neq3^2$	不能
D	$3^2+5^2=34\neq6^2$	不能

2. C　【解析】连接 AC. 根据勾股定理得 $AC=BC=\sqrt{5}$，$AB=\sqrt{10}$. $\because (\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2=(\sqrt{10})^2$，$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\therefore \angle ABC=45°$. 故选 C.

3. $\frac{5}{2}$　【解析】$\because AB=5$，$AC=4$，$BC=3$，$\therefore AB^2=AC^2+BC^2$，$\therefore \angle ACB=90°$. 由作图可知，$MN$ 是 AB 的垂直平分线，$\therefore O$ 是 AB 的中点，$\therefore CO=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$.

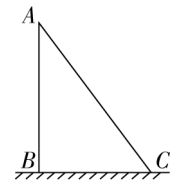
4. 45　【解析】$\because \angle A=90°$，$AC=AB=8$，$\therefore BC^2=AC^2+AB^2=8^2+8^2=128$. $\because CD=4$，$BD=12$，$\therefore CD^2+BC^2=16+128=144=BD^2$，$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形，且 $\angle DCB=90°$. $\because AC=AB$，$\angle A=90°$，$\therefore \angle ACB=45°$，$\therefore \angle ACD=45°$.

5. (1)【证明】连接 CE，如图. $\because D$ 是 BC 的中点，$DE\perp BC$，$\therefore EB=EC$. $\because BE^2-EA^2=AC^2$，$\therefore EC^2-EA^2=AC^2$，$\therefore EC^2=EA^2+AC^2$，$\therefore \angle A=90°$.



(2)【解】$\because D$ 是 BC 的中点，$BD=2.5$，$\therefore BC=2BD=5$. $\because \angle A=90°$，$AC=3$，$\therefore AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. $\because EB=EC$，$\therefore$ 设 $EB=EC=x$，则 $AE=4-x$. 在 Rt$\triangle EAC$ 中，$AC^2+AE^2=EC^2$，即 $3^2+(4-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{25}{8}$，$\therefore AE=\frac{7}{8}$.

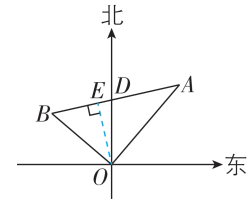
6. 不垂直　【解析】如图，$\because AB=8$ m，$BC=6$ m，$AC=10.3$ m，$\therefore AB^2+BC^2\neq AC^2$，$\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形，$\therefore$ 电线杆与地面不垂直.



7. 2.5　【解析】$\because CH^2+BH^2=2.4^2+1.8^2=9$，$BC^2=3^2=9$，$\therefore CH^2+BH^2=BC^2$，$\therefore \triangle CHB$ 是直角三角形，且 $\angle CHB=90°$，$\therefore \angle CHA=90°$，$\therefore AC^2=AH^2+CH^2$. $\because AB=AC$，$\therefore AH=AB-HB=AC-1.8$，$\therefore AC^2=(AC-1.8)^2+2.4^2$，解得 $AC=2.5$. 故答案为 2.5.

8.【解】(1) 由题意得 $AB=100$ n mile，$OA=40\times2=80$(n mile)，$OB=30\times2=60$(n mile). $\because OA^2+OB^2=80^2+60^2=10\ 000$，$AB^2=100^2=10\ 000$，$\therefore OB^2+OA^2=AB^2$，$\therefore \triangle OAB$ 为直角三角形，且 $\angle AOB=90°$. $\because$ 由题意知 $\angle AOD=40°$，$\therefore \angle BOD=50°$，即第二艘搜救艇的航行方向是北偏西 50 度.

(2) 如图，过点 O 作 $OE\perp AB$，垂足为点 E，OE 的长度即为最近距离.



由(1)知 $OA=80$ n mile，$OB=60$ n mile，$AB=100$ n mile，$\angle AOB=90°$. 在 Rt$\triangle OAB$ 中，$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}AB\cdot OE$，即 $80\times60=100OE$，$\therefore OE=48$ n mile.

答：与港口 O 最近的距离是 48 n mile.

刷提升

1. B　【解析】A 选项，$\because \angle A-\angle B=\angle C$，且 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，$\therefore \angle A=90°$，$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形；B 选项，$\because \angle A:\angle B:\angle C=3:4:5$，$\therefore \angle C=\frac{5}{3+4+5}\times180°=75°\neq90°$，$\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形；C 选项，$\because (b+c)(b-c)=a^2$，$\therefore b^2-c^2=a^2$，$\therefore a^2+c^2=b^2$，$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形；D 选项，$\because 7^2+24^2=25^2$，即 $a^2+b^2=c^2$，$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形. 故选 B.

2. C　【解析】连接 AC. $\because AD=12$ m，$CD=9$ m，$\angle ADC=90°$，$\therefore AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15$(m). 又 $\because AB=25$ m，$BC=20$ m，$\therefore AC^2+BC^2=15^2+20^2=25^2=AB^2$，$\therefore \triangle ABC$ 是直角三

刷有所得

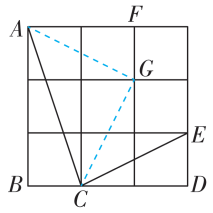
1. 勾股定理的逆定理是用边的关系判断一个三角形是否是直角三角形. 在判断时，要注意先确定最长边 c，再通过计算验证 a^2+b^2 是否等于 c^2. 2. 勾股定理的逆定理是判定一个三角形是直角三角形的重要工具.

易错警示

三边长之比为 3:4:5 的三角形才是直角三角形，这个比值和三角形的内角度数无关.

角形，$\angle ACB=90°$，∴ 这块地的面积为 $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times15\times20-\frac{1}{2}\times9\times12=96(m^2)$. 故选 C.

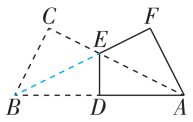
3. 45 【解析】如图，标出格点 F,G，连接 CG,AG. 由勾股定理得 $AG^2=CG^2=1^2+2^2=5$，$AC^2=1^2+3^2=10$，则 $AG^2+CG^2=AC^2$，所以 $\angle CGA=90°$，即 $\triangle CAG$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle CAG=45°$. 因为 $AF/\!/BC$，所以 $\angle CAF=\angle BCA$. 在 $\triangle AFG$ 和 $\triangle CDE$ 中，



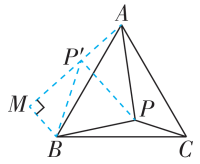
$\begin{cases}AF=CD,\\ \angle AFG=\angle CDE=90°,\\ FG=DE,\end{cases}$ 所以 $\triangle AFG\cong\triangle CDE$（SAS），所以 $\angle FAG=\angle DCE$，所以 $\angle ACB-\angle DCE=\angle CAF-\angle FAG=\angle CAG=45°$. 故答案为 45.

4. 2 【解析】∵ $AB^2+BC^2=5^2+12^2=169=AC^2$，∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形. ∵ 三条角平分线交于点 P，∴ 点 P 到三边的距离相等，设为 h，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(5+12+13)h=\frac{1}{2}\times5\times12$，解得 $h=2$，即点 P 到 AB 的距离为 2. 故答案为 2.

5. $\frac{9}{2}$ 【解析】连接 BE，如图. ∵ $AB=6\sqrt{5}$，$AC=12$，$BC=6$，∴ $AB^2=180$，$AC^2=144$，$BC^2=36$，∴ $AB^2=AC^2+BC^2$，∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle C=90°$. 由点 B 恰好与点 A 重合及折叠的性质得 $DE\perp AB$，$BD=AD$，∴ DE 是 AB 的垂直平分线，∴ $BE=AE$. 设 $CE=x$，则 $BE=AE=12-x$. 在 Rt$\triangle BCE$ 中，$BE^2=CE^2+BC^2$，∴ $(12-x)^2=x^2+6^2$，∴ $x=\frac{9}{2}$，∴ $CE=\frac{9}{2}$，故答案为 $\frac{9}{2}$.



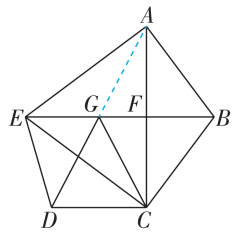
（第 5 题图）



（第 6 题图）

6.【解】∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\angle ABC=60°$. 将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 60°得到 $\triangle BP'A$，连接 PP'，如图，∴ $\angle AP'B=\angle BPC$，$AP'=CP=\sqrt{3}$，$BP'=BP=2$，$\angle PBP'=60°$，∴ $\triangle BPP'$ 是等边三角形，∴ $PP'=2$，$\angle BP'P=60°$. ∵ $AP'=\sqrt{3}$，$AP=\sqrt{7}$，∴ $AP'^2+PP'^2=AP^2$，∴ $\triangle PP'A$ 是直角三角形，且 $\angle AP'P=90°$，∴ $\angle BPC=\angle AP'B=90°+60°=150°$. 过点 B 作 $BM\perp AP'$，交 AP' 的延长线于点 M，∴ $\angle MP'B=30°$，∴ $BM=1$. 在 Rt$\triangle MP'B$ 中，由勾股定理得 $P'M=\sqrt{3}$，∴ $AM=\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. 在 Rt$\triangle AMB$ 中，由勾股定理得 $AB=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{12+1}=\sqrt{13}$. 故等边三角形 ABC 的边长为 $\sqrt{13}$.

7.【解】(1)①∵ $BE/\!/CD$，∴ $\angle BEC=\angle DCE$.
∵ $\angle CEB=\angle CED$，∴ $\angle CED=\angle DCE$，
∴ $CD=DE=25$，故道路 CD 的长为 25 米.
②∵ $AE=40$，$AB=30$，$EF=32$，$FB=18$，∴ $EB=32+18=50$，∴ $AE^2+AB^2=EB^2$，∴ $\angle EAB=90°$.
∵ $\angle ECB=90°$，$BC=30$，
∴ 在 Rt$\triangle ECB$ 中，$EC=\sqrt{EB^2-BC^2}=40$.
∵ $AE=EC$，$AB=BC$，
∴ EB 垂直平分 AC，即 $EB\perp AC$，$FA=FC$，
∴ $S_{\triangle AEB}+S_{\triangle EBC}=\frac{1}{2}\times AE\times AB+\frac{1}{2}\times EC\times BC=\frac{1}{2}EB\times AC$，
∴ $AC=\dfrac{\frac{1}{2}\times30\times40+\frac{1}{2}\times30\times40}{\frac{1}{2}\times50}=48$（米）.
故答案为 48.
(2)①由(1)②可得 EB 垂直平分 AC，A,C 关于直线 BE 对称，连接 AD，交 BE 于点 G，连接 CG，如图. 根据两点之间线段最短可得 AD,EB 的交点 G 到 C,E,D,B 的距离之和最小，点 G，CG，DG 即为所求.

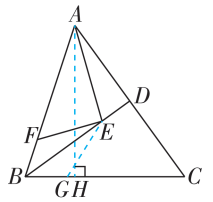


②如图. ∵ $DC/\!/EB$，$EB\perp AC$，∴ $AC\perp DC$，
∴ $\angle ACD=90°$. 因为 $AC=48$，$DC=25$，$EB=50$，“爱心衣物回收箱”到 4 栋住宅楼的距离之和为 $AD+EB=\sqrt{DC^2+AC^2}+EB=\sqrt{25^2+48^2}+50=(50+\sqrt{2\,929})$ 米，故答案为 $(50+\sqrt{2\,929})$.

重难专题 5　巧用勾股定理解决问题

刷难关

1. B 【解析】如图，在 BC 边上取点 G 使 $BG=BF$，连接 EG，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H. ∵ $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D，∴ $\angle EBF=\angle EBG$. 又∵ $BG=BF$，$BE=BE$，∴ $\triangle EBF\cong\triangle EBG$，∴ $EF=EG$，∴ $AE+EF=AE+EG$. 当点 A,E,G 三点共线且该直线垂直于 BC 时，$AE+$



思路分析
连接 AC，先在 Rt$\triangle ADC$ 中利用勾股定理得到 AC 的长，再利用勾股定理的逆定理得到 $\triangle ABC$ 是直角三角形，最后利用 $S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ACD}$ 求得这块地的面积即可.

关键点拨
此题采用“割补法”，直角三角形的面积等于三个小三角形面积之和，利用这个等量关系列方程，求出 P 到 AB 的距离.

EF 取得最小值，即最小值为 AH 的长. 在 $\triangle ABD$ 中，$AB=5$，$BD=4$，$AD=3$，$\therefore BD^2+AD^2=AB^2$，$\therefore \triangle ABD$ 为直角三角形，且 $BD\perp AD$，$\therefore \angle ADB=\angle CDB=90°$. 又 $\because AD=CD$，$BD=BD$，$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CBD$，$\therefore AB=BC=5$. $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BD\times AC=\frac{1}{2}AH\times BC$，$\therefore \frac{1}{2}\times4\times(3+3)=\frac{1}{2}AH\times5$，$\therefore AH=\frac{24}{5}$. 故选 B.

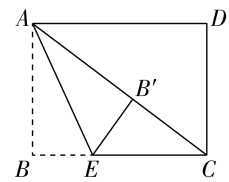
2.【解】(1) $\because$ 长 $AB=5$ cm，宽 $BC=4$ cm，高 $AE=6$ cm，$\therefore EF=AB=GH=5$ cm，$GF=BC=EH=4$ cm，$AE=CG=6$ cm，$\therefore S_{甲min}=\sqrt{(AE+EF)^2+GF^2}=\sqrt{11^2+4^2}=\sqrt{137}$ (cm)，$S_{乙min}=\sqrt{(AE+EH)^2+GH^2}=\sqrt{10^2+5^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ (cm)，$S_{丙min}=\sqrt{(AB+BC)^2+CG^2}=\sqrt{9^2+6^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$ (cm). 故三只蚂蚁的行走路径 $S_甲$，$S_乙$，$S_丙$ 的最小值分别是 $\sqrt{137}$ cm，$5\sqrt{5}$ cm，$3\sqrt{13}$ cm.

(2) 由(1)知，$S_{甲min}=\sqrt{137}$ cm，$S_{乙min}=5\sqrt{5}$ cm，$S_{丙min}=3\sqrt{13}$ cm. $\because \sqrt{137}>\sqrt{125}>\sqrt{117}$，$\therefore$ 蚂蚁丙最先到达，蚂蚁甲最后到达.

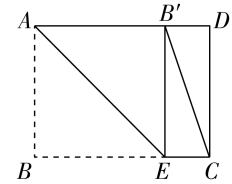
3. A 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是长方形，$\therefore AB=CD=6$，$AD=BC=8$，$\angle B=\angle D=90°$，$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$. 由折叠的性质得 $\triangle DEC\cong\triangle D'EC$，$\therefore CD'=CD=6$，$ED=ED'$，$\angle CD'E=\angle D=90°$，$\therefore \angle AD'E=90°$，$AD'=AC-CD'=4$. 设 $ED=x$，则 $ED'=x$，$AE=8-x$. 在 $Rt\triangle AED'$ 中，由勾股定理得 $(AD')^2+(ED')^2=AE^2$，即 $4^2+x^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$，$\therefore ED=3$. 故选 A.

4. $\frac{3}{2}$ 或 3 【解析】当 $\triangle CEB'$ 为直角三角形时，有以下两种情况：

①当 $\angle CB'E=90°$ 时，如图(1)所示，连接 AC. 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$BC=4$，所以 $AC^2=4^2+3^2=25$，则 $AC=5$. 因为 $\angle B$ 沿 AE 折叠，使点 B 落在点 B' 处，所以 $\angle AB'E=\angle B=90°$. 又因为 $\angle CB'E=90°$，所以点 A，B'，C 共线，即点 B 落在对角线 AC 上的点 B' 处，则 $CB'=5-3=2$. 设 $BE=EB'=x$，则 $CE=4-x$. 在 $Rt\triangle CEB'$ 中，因为 $EB'^2+CB'^2=CE^2$，所以 $x^2+2^2=(4-x)^2$，解得 $x=\frac{3}{2}$，即 $BE=\frac{3}{2}$.



图(1)



图(2)

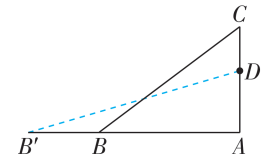
②当 $\angle CEB'=90°$ 时，易知点 B' 落在 AD 边上，如图(2)所示. 此时 $\angle BAE=\angle EAB'=\frac{1}{2}\angle BAD=45°$，所以 $\triangle ABE$ 为等腰直角三角形，所以 $BE=AB=3$. 综上所述，BE 的长为 $\frac{3}{2}$ 或 3.

故答案为 $\frac{3}{2}$ 或 3.

关键点拨 在应用勾股定理解决实际问题时，关键是从题中抽象出勾股定理这一数学模型，画出准确的示意图，领会数形结合的思想的应用.

5.【解】(1) 由题意可知 $AC+BC=8$ 米，设 $AC=x$ 米，则 $BC=(8-x)$ 米. $\because \angle A=90°$，$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$，$\therefore 4^2+x^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$，$\therefore AC=3$ 米，$BC=5$ 米，故旗杆距地面 3 米处折断.

(2) 如图. 由题意得 $AD=3-1.25=1.75$(米)，$\therefore B'D=8-1.75=6.25$(米)，



$\therefore AB'=\sqrt{B'D^2-AD^2}=6$ 米，$\therefore$ 距离旗杆底部周围 6 米范围内有被砸伤的危险.

17.4 直角三角形全等的判定

刷基础

1. C 【解析】需要添加的条件为 $AC=AD$. 理由：在 $Rt\triangle ABC$ 与 $Rt\triangle ABD$ 中，$\because \begin{cases}AC=AD,\\AB=AB,\end{cases}$ $\therefore Rt\triangle ABC\cong Rt\triangle ABD$(HL). 故选 C.

关键点拨 根据 A 选项中的条件只能得到三个角对应相等，没有对应边的任何信息，而判断三角形全等的所有方法中都至少有一组对应边相等.

2. A 【解析】A 选项，两个锐角对应相等，不能判定两个直角三角形全等，符合题意；B 选项，可以利用角角边判定两个三角形全等，不符合题意；C 选项，可以利用边角边判定两个三角形全等，不符合题意；D 选项，可以利用 HL 判定两个直角三角形全等，不符合题意. 故选 A.

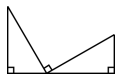
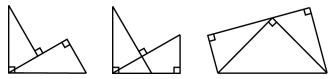
3. B 【解析】$\because AB=AC$，$BD=CD$，$AD=AD$，$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$(SSS)，$\therefore \angle B=\angle C$. 又 $\because \angle DEB=\angle DFC=90°$，$BD=CD$，$\therefore \triangle BED\cong\triangle CFD$(AAS)，$\therefore DE=DF$. 在 $Rt\triangle AED$ 和 $Rt\triangle AFD$ 中，$\because AD=AD$，$DE=DF$，$\therefore Rt\triangle AED\cong Rt\triangle AFD$(HL). 故题图中有 3 对全等三角形.

4. B 【解析】$\because AC=BC$，$AE=CD$，$AE\perp CD$ 于点 E，$BD\perp CD$ 于点 D，$\therefore Rt\triangle AEC\cong Rt\triangle CDB$(HL)，$\therefore CD=AE=24$. 又 $\because AC=BC=25$，$\therefore$ 在 $Rt\triangle ACE$ 中，$CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=7$，$\therefore DE=CD-$

$CE=24-7=17$. 故选 B.

5. 90°

模型归纳 | 一线三垂直模型

基本模型	常见模型
	

【解析】∵ 滑梯、墙与地面正好构成直角三角形，且 $BC=EF$，$AC=DF$，∴ Rt△ABC≌Rt△DEF（HL），∴ $\angle ABC=\angle DEF$. ∵ $\angle DEF+\angle DFE=90°$，∴ $\angle ABC+\angle DFE=90°$. 故答案为 90°.

6. 55°　【解析】∵ $\angle ABC=\angle BDE=90°$，∴ $\angle ABD=90°-\angle DBE$. 在 Rt△$ABC$ 和 Rt△BDE 中，$\begin{cases}AC=BE,\\BC=DE,\end{cases}$ ∴ Rt△ABC≌Rt△BDE（HL），∴ $\angle BAC=\angle DBE=20°$，$AB=BD$，∴ $\angle ABD=90°-20°=70°$，$\angle BDA=\angle BAD$. ∵ $\angle BDA+\angle BAD=2\angle BDA=180°-\angle ABD=180°-70°=110°$，∴ $\angle BDA=55°$，故答案为 55°.

7. (1)【证明】∵ $BE=CF$，∴ $BE+BC=CF+BC$，∴ $BF=CE$.

在 Rt△ABF 与 Rt△DCE 中，$\begin{cases}BF=CE,\\AB=DC,\end{cases}$

∴ Rt△ABF≌Rt△DCE（HL），∴ $\angle E=\angle F$.

(2)【解】$PO\perp BC$. 理由如下：

由(1)得 $\angle E=\angle F$.

∵ PO 平分 $\angle EPF$，∴ $\angle EPO=\angle FPO$.

在△EPO 和△FPO 中，$\begin{cases}\angle E=\angle F,\\\angle EPO=\angle FPO,\\PO=PO,\end{cases}$

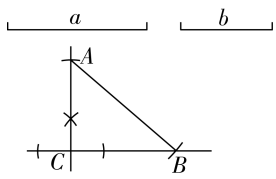
∴ △EPO≌△FPO（AAS），∴ $\angle EOP=\angle FOP$.

∵ $\angle EOP+\angle FOP=180°$，∴ $\angle EOP=\angle FOP=90°$，∴ $PO\perp BC$.

关键点拨

(2) 证出△EPO≌△FPO是解题的关键.

8.【解】如图，△ABC 为所作.



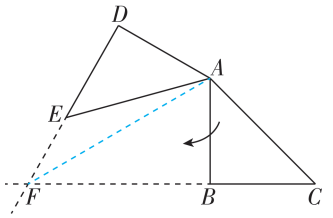
思路分析

先证明△ABC≌△AFE，推出 $AB=AF$，再证明 Rt△AGF≌Rt△AGB，推出 $\angle EAG=\angle FAG$ 即可解决问题.

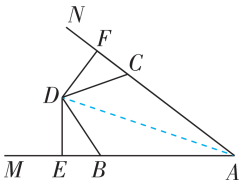
刷提升

1. A　【解析】∵ $\angle ABC=90°$，$EF\perp AC$，∴ $\angle ABC=\angle AFE=90°$. 在△$AEF$ 与△ACB 中，$\begin{cases}\angle EAF=\angle CAB,\\\angle AFE=\angle ABC,\\AE=AC,\end{cases}$ ∴ △AEF≌△ACB（AAS），∴ $AF=AB$. ∵ $\angle ABC=90°$，$\angle C=40°$，∴ $\angle BAC=50°$. 在 Rt△ABG 和 Rt△AFG 中，$\begin{cases}AB=AF,\\AG=AG,\end{cases}$ ∴ Rt△ABG≌Rt△AFG（HL），∴ $\angle EAG=\angle FAG=\frac{1}{2}\times50°=25°$. 故选 A.

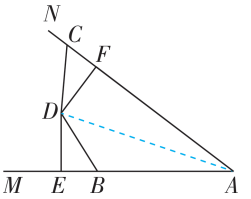
2. B　【解析】如图，连接 AF. 由题意得 $\angle ABF=\angle ADF=90°$，$AB=AD$，$DE=BC$. 在 Rt△$ABF$ 和 Rt△ADF 中，$\begin{cases}AF=AF,\\AB=AD,\end{cases}$ ∴ Rt△ABF≌Rt△ADF（HL），∴ $BF=DF$，∴ $CF-EF=BC+BF-EF=BC+DE+EF-EF=BC+DE=2BC$，∴ $CF-EF$ 的值保持不变. 故选 B.



3. 6 或 10　【解析】①如图(1)，当点 C 在线段 AF 上时，连接 AD. ∵ $DE\perp AM$ 于 E，$DF\perp AN$ 于 F，∴ $\angle DEB=\angle DFC=90°$. 在 Rt△$DEB$ 和 Rt△DFC 中，$\begin{cases}DB=DC,\\DE=DF,\end{cases}$ ∴ Rt△DEB≌Rt△DFC（HL），∴ $CF=BE=2$. 又∵ 在 Rt△DEA 和 Rt△DFA 中，$\begin{cases}DA=DA,\\DE=DF,\end{cases}$ ∴ Rt△DEA≌Rt△DFA（HL），∴ $AF=AE=AB+BE=6+2=8$，∴ $AC=AF-CF=8-2=6$；



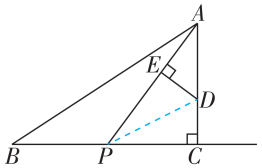
图(1)



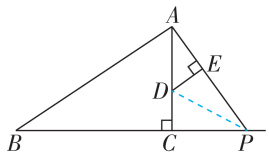
图(2)

②如图(2)，当点 C 在线段 AF 的延长线上时，连接 AD. 同①可得 $AF=AE=8$，$CF=BE=2$，∴ $AC=AF+CF=8+2=10$. 故答案为 6 或 10.

4. 3 或 9　【解析】①当点 P 在点 C 左侧时，如图(1)，连接 DP. ∵ $\angle DCP=\angle DEP=\angle AED=90°$，∴ 在 Rt△$DCP$ 与 Rt△DEP 中，$\begin{cases}DC=DE,\\DP=DP,\end{cases}$ ∴ Rt△DCP≌Rt△DEP（HL），∴ $PC=PE$. 在 Rt△ADE 中，$AD=AC-CD=5$，$DE=DC=3$，∴ $AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. 在 Rt△$APC$ 中，$PC=12-2t$，∴ $AP=AE+PE=12-2t+4=16-2t$，∴ $(12-2t)^2+8^2=(16-2t)^2$，解得 $t=3$.



图(1)



图(2)

②当点 P 在点 C 右侧时,如图(2),连接 PD,同理,可得 $AE=4$,$PE=PC$. 在 Rt△APC 中,$PC=2t-12$,$AP=AE+PE=4+2t-12=2t-8$,∴ $(2t-12)^2+8^2=(2t-8)^2$,解得 $t=9$. 综上,$t=3$ 或 $t=9$ 时,$DE=CD$. 故答案为 3 或 9.

5. (1)【证明】∵ $DE\perp AC$ 于 E,$BF\perp AC$ 于 F,∴ $\angle DEC=\angle BFA=90°$.

在 Rt△DEC 和Rt△BFA 中,∵ $\begin{cases}CD=AB,\\CE=AF,\end{cases}$

∴ Rt△DEC≌Rt△BFA(HL),∴ $DE=BF$.

在△DEM 和△BFM 中,∵ $\begin{cases}\angle DME=\angle BMF,\\\angle DEM=\angle BFM,\\DE=BF,\end{cases}$

∴ △DEM≌△BFM(AAS),∴ $MB=MD$,$ME=MF$.

(2)【解】成立. 证明:∵ $DE\perp AC$ 于 E,$BF\perp AC$ 于 F,∴ $\angle DEC=\angle BFA=90°$. 在 Rt△$DEC$ 和 Rt△BFA 中,∵ $\begin{cases}CD=AB,\\CE=AF,\end{cases}$ ∴ Rt△DEC≌Rt△BFA(HL),∴ $DE=BF$. 在△DEM 和△BFM 中,∵ $\begin{cases}\angle DME=\angle BMF,\\\angle DEM=\angle BFM,\\DE=BF,\end{cases}$ ∴ △DEM≌△BFM(AAS),∴ $MB=MD$,$ME=MF$.

刷素养

6. (1)【证明】∵ $\angle BAC=\angle DAE$,

∴ $\angle CAE=\angle BAD$.

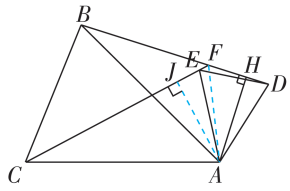
在△ACE 和△ABD 中,$\begin{cases}AC=AB,\\\angle CAE=\angle BAD,\\AE=AD,\end{cases}$

∴ △ACE≌△ABD(SAS).

【解】(2) ∵ △ACE≌△ABD,∴ $\angle AEC=\angle ADB$,∴ $\angle AEF+\angle AEC=\angle AEF+\angle ADB=180°$,

∴ $\angle DAE+\angle DFE=180°$. ∵ $\angle BFC+\angle DFE=180°$,∴ $\angle BFC=\angle DAE=49°$.

(3)结论:$EF+DH=FH$. 证明:如图,连接 AF,过点 A 作 $AJ\perp CF$ 于点 J.



∵ △ACE≌△ABD,

∴ $S_{\triangle ACE}=S_{\triangle ABD}$,$CE=BD$. ∵ $AJ\perp CE$,$AH\perp BD$.

∴ $\frac{1}{2}CE\cdot AJ=\frac{1}{2}BD\cdot AH$,∴ $AJ=AH$.

在 Rt△AFJ 和 Rt△AFH 中,$\begin{cases}AF=AF,\\AJ=AH,\end{cases}$

∴ Rt△AFJ≌Rt△AFH(HL),∴ $FJ=FH$.

在 Rt△AJE 和 Rt△AHD 中,$\begin{cases}AE=AD,\\AJ=AH,\end{cases}$

∴ Rt△AJE≌Rt△AHD(HL),∴ $EJ=DH$,

∴ $EF+DH=EF+EJ=FJ=FH$.

思路分析

(2)由全等三角形的性质可得 $\angle AEC=\angle ADB$,结合平角的定义及等量代换可求得 $\angle DAE+\angle DFE=180°$,根据 $\angle BFC+\angle DFE=180°$,可得$\angle BFC=\angle DAE$,即可求解;(3)连接 AF,过点 A 作 $AJ\perp CF$ 于点 J. 结合全等三角形的性质可得 $AJ=AH$,再利用 HL 定理证明 Rt△AFJ≌Rt△AFH,Rt△AJE≌Rt△AHD 可得 $FJ=FH$,$EJ=DH$,进而可证明结论.

17.5 反证法

刷基础

1. C 【解析】原命题"在同一平面内,若 $a\perp b$,$c\perp b$,则 $a/\!/c$",用反证法时应假设结论不成立,即假设 a 与 c 相交. 故选 C.

2. A 【解析】用反证法证明"在△ABC 中,如果 $AB=c$,$BC=a$,$CA=b$,$\angle C>\angle B>\angle A$ 且 $\angle C\neq 90°$,那么 $a^2+b^2\neq c^2$"时,应先假设 $a^2+b^2=c^2$,故选 A.

3. A 【解析】反证法的证明步骤:①假设;②推理论证;③推出矛盾;④结论. 用反证法证明题目中的命题的四个步骤应该为③假设在△ABC 中,$\angle B\geqslant 90°$. ④由 $AB=AC$,得 $\angle B=\angle C\geqslant 90°$,即 $\angle B+\angle C\geqslant 180°$. ① ∴ $\angle A+\angle B+\angle C>180°$,这与三角形内角和为 180°矛盾. ②因此假设不成立,∴ $\angle B<90°$.

4. 都大于 45° 【解析】用反证法证明"在直角三角形中至少有一个锐角小于或等于 45°",应假设两个锐角都大于 45°.

5. ②①④③ 【解析】证明:假设$\sqrt{2}$是有理数,那么存在两个互质的正整数 p,q,使得$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$,于是 $p=\sqrt{2}q$,∴ $p^2=2q^2$. ∵ $2q^2$ 是偶数,∴ p^2 是偶数. ∵ 只有偶数的平方才是偶数,∴ p 也是偶数,∴ 可设 $p=2s$,代入,得 $4s^2=2q^2$,即 $q^2=2s^2$,∴ q 是偶数. 这样,p 和 q 都是偶数,不互质,这与假设 p,q 互质矛盾. 这个矛盾说明$\sqrt{2}$不能写成分数的形式,即$\sqrt{2}$不是有理数. 故答案为②①④③.

6.【解】求证:$a/\!/b$.

证明:假设 a,b 相交于点 A,则过 A 点有两条直线 a,b 都平行于 c,这与"过直线外一点有且只有一条直线与已知直线平行"相矛盾,所以假设是错误的,所以 $a/\!/b$.

7.【证明】假设这两个整数都是奇数,其中一个奇数为 $2n+1$,另一个奇数为 $2p+1$,n,p 为整数,则$(2n+1)(2p+1)=2(2np+n+p)+1$. 因为无论 n,p 取何值,$2(2np+n+p)+1$ 都是奇数,这与已知中两个整数的积是偶数相矛盾,因此假设不成立,所以这两个整数中至少有一个是偶数.

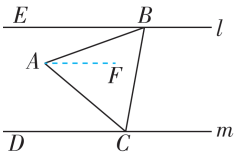
刷有所得

反证法的一般步骤:①假设命题的结论不成立;②从这个假设和其他已知条件出发,经过推理论证,得出矛盾;③由矛盾判定假设不正确,从而说明原命题的结论正确.

全章综合训练

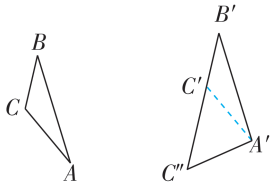
刷中考

1. B 【解析】如图，过点 A 作 $AF//l$. ∵ 直线 $l//m$，∴ $AF//m$. ∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $\angle BAC=60°$. ∵ $AF//l$，∴ $\angle BAF=\angle ABE$. ∵ $\angle ABE=21°$，∴ $\angle BAF=21°$，∴ $\angle CAF=\angle BAC-\angle BAF=60°-21°=39°$. ∵ $AF//m$，∴ $\angle ACD=\angle CAF=39°$.



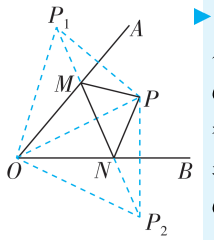
2. C 【解析】在等边 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=60°$. ∵ BD 是 AC 边上的高，∴ BD 平分 $\angle ABC$，∴ $\angle CBD=\frac{1}{2}\angle ABC=30°$. ∵ $BD=ED$，∴ $\angle DEC=\angle CBD=30°$，故选 C.

3. C 【解析】如图，$\angle B=\angle B'=30°$，$AC=A'C'=A'C''$，$AB=A'B'$，则 $\angle A'C'B'=\angle C=n°$，$\angle A'C''B'=180°-n°$. 故选 C.



4. 100°　【解析】∵ $AC=AE$，$BC=BD$，∴ 设 $\angle AEC=\angle ACE=x°$，$\angle BDC=\angle BCD=y°$，∴ $\angle A=180°-2x°$，$\angle B=180°-2y°$. ∵ $\angle ACB+\angle A+\angle B=180°$，$\angle BDC+\angle AEC+\angle DCE=180°$，∴ $\angle ACB+(180°-2x°)+(180°-2y°)=180°$，$\angle DCE=180°-(x°+y°)$，∴ $\angle ACB+360°-2(x°+y°)=180°$，∴ $\angle ACB+2\angle DCE=180°$. ∵ $\angle DCE=40°$，∴ $\angle ACB=100°$.

5. 80°　【解析】如图，作点 P 关于 OA，OB 的对称点 P_1，P_2，连接 OP_1，OP_2，P_1P_2，交 OA，OB 于点 M，N，此时 $\triangle PMN$ 的周长最小，连接 OP. ∵ P，P_1 关于 OA 对称，∴ $\angle P_1OP=2\angle MOP$，$OP_1=OP$，$\angle OP_1M=\angle OPM$，同理，$\angle P_2OP=2\angle NOP$，$OP=OP_2$，$\angle OP_2N=\angle OPN$，∴ $\angle P_1OP_2=\angle P_1OP+\angle P_2OP=2(\angle MOP+\angle NOP)=2\angle AOB=100°$，$OP_1=OP_2=OP$，∴ $\triangle P_1OP_2$ 是等腰三角形，∴ $\angle OP_2N=\angle OP_1M=40°$，∴ $\angle MPN=\angle MPO+\angle NPO=\angle OP_2N+\angle OP_1M=80°$. 故答案为 80°.



▶关键点拨　作点 P 关于 OA，OB 的对称点 P_1，P_2. 连接 OP，OP_1，OP_2，P_1P_2，交 OA，OB 于点 M，N，此时，$\triangle PMN$ 的周长最小，根据对称的性质结合等腰三角形的性质即可求解.

6. 【证明】∵ $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 都是等腰三角形，∴ $AD=CD$，$EC=EB$，∴ $\angle A=\angle DCA$. ∵ $\angle A=\angle CBE$，∴ $\angle DCA=\angle CBE$，∴ $CD//BE$，∴ $\angle DCE=\angle BEF$. ∵ $EF=AD$，∴ $EF=CD$. 在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle FEB$ 中，$\begin{cases}CD=EF,\\ \angle DCE=\angle FEB,\\ EC=EB,\end{cases}$ ∴ $\triangle DCE\cong\triangle FEB$（SAS），∴ $DE=BF$.

7. (1)【证明】在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 中，$\begin{cases}AB=DF,\\ AC=DE,\\ BC=EF,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABC\cong\triangle DFE$，∴ $\angle ACB=\angle DEF$，∴ $EG=CG$，∴ $\triangle GEC$ 是等腰三角形.

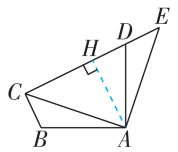
(2)【解】∵ $AC=DE$，$EG=CG$，∴ $AC-CG=DE-EG$，∴ $AG=DG$，∴ $\angle GAD=\angle GDA=\frac{1}{2}(180°-\angle AGD)$. ∵ $\angle ACE=\angle DEF=\frac{1}{2}(180°-\angle CGE)$，$\angle AGD=\angle EGC$，∴ $\angle CAD=\angle ACB$，∴ $AD//l$. 故答案为平行.

8. B 【解析】∵ $\angle ACB=90°$，$AB=7-1=6$（cm），点 D 为线段 AB 的中点，∴ $CD=\frac{1}{2}AB=3$ cm，故选 B.

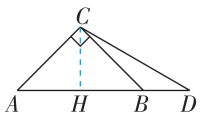
9. B 【解析】过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120°$，$AB=AC$，∴ $\angle B=\angle C=\frac{1}{2}(180°-\angle BAC)=30°$. 又∵ $AD\perp BC$，$AB=12$ m，∴ $AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times12=6$（m），故选 B.

思路分析　由旋转得 $AC=AE$，$\angle CAE=90°$，$DE=BC=1$，推出 $\triangle ACE$ 是等腰直角三角形. 过点 A 作 $AH\perp CE$ 于点 H，可求得 $AH=2$，$HD=1$，再利用勾股定理即可求出 AD 的长.

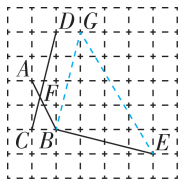
10. A 【解析】由旋转得 $\angle CAE=90°$，$AC=AE$，$DE=BC=1$，∴ $\triangle ACE$ 是等腰直角三角形，$CE=CD+DE=3+1=4$. 如图，过点 A 作 $AH\perp CE$ 于点 H，∴ $CH=HE$，∴ $AH=\frac{1}{2}CE=CH=HE=2$，∴ $HD=HE-DE=2-1=1$，∴ $AD=\sqrt{AH^2+HD^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，故选 A.



11. B 【解析】如图，过点 C 作 $CH\perp AB$ 于 H. ∵ $AC=BC=2$，$\angle ACB=90°$，$CH\perp AB$，∴ $AB=2\sqrt{2}$，∴ $AH=BH=CH=\sqrt{2}$. ∵ $CD=AB=2\sqrt{2}$，∴ $DH=\sqrt{CD^2-CH^2}=\sqrt{8-2}=\sqrt{6}$，∴ $DB=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，故选 B.



（第 11 题图）



（第 12 题图）

12. C 【解析】如图，过 B 点作 $BG//CD$，连接 EG. ∵ $BG//CD$，∴ $\angle ABG=\angle CFB=\alpha$. ∵ $BG^2=$

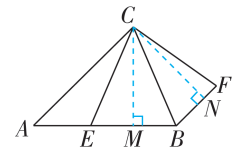
$1^2+4^2=17$，$BE^2=1^2+4^2=17$，$EG^2=3^2+5^2=34$，∴ $BG^2+BE^2=EG^2$，∴ △BEG 是等腰直角三角形，∠$GBE=90°$，∴ ∠ABE = ∠GBE + ∠$ABG=90°+\alpha$. 故选 C.

13. A 【解析】因为沿过点 A 的直线将纸片折叠，使点 B 落在边 BC 上的点 D 处，所以 $AD=AB=2$，∠B = ∠ADB. 因为折叠纸片，使点 C 与点 D 重合，所以 $CE=DE$，∠C = ∠CDE. 因为 ∠$BAC=90°$，所以 ∠B + ∠C = $90°$，所以 ∠ADB+∠$CDE=90°$，所以 ∠$ADE=90°$，所以 $AD^2+DE^2=AE^2$. 设 $AE=x$，则 $CE=DE=3-x$，所以 $2^2+(3-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{13}{6}$，所以 $AE=\frac{13}{6}$. 故选 A.

14. 60 【解析】∵ $AB=AC$，∴ ∠ABC = ∠ACB. ∵ $BF\parallel AC$，∴ ∠ACB = ∠CBF，∴ ∠ABC = ∠CBF，∴ BC 平分 ∠ABF. 如图，过点 C 作 $CM\perp AB$ 于点 M，$CN\perp BF$ 于点 N，则 $CM=CN$. ∵ $S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}AE\cdot CM$，$S_{\triangle CBF}=\frac{1}{2}BF\cdot CN$，且 $BF=AE$，∴ $S_{\triangle CBF}=S_{\triangle ACE}$，∴ 四边形 $EBFC$ 的面积为 $S_{\triangle CBF}+S_{\triangle CBE}=S_{\triangle ACE}+S_{\triangle CBE}=S_{\triangle CBA}$. ∵ $AC=13$，∴ $AB=13$. 设 $AM=x$，则 $BM=13-x$. 由勾股定理，得 $CM^2=AC^2-AM^2=BC^2-BM^2$，∴ $13^2-x^2=10^2-(13-x)^2$，解得 $x=\frac{119}{13}$，∴ $CM=\sqrt{13^2-\left(\frac{119}{13}\right)^2}=\frac{120}{13}$，∴ $S_{\triangle CBA}=\frac{1}{2}AB\cdot CM=60$，∴ 四边形 $EBFC$ 的面积为 60. 故答案为 60.

思路分析

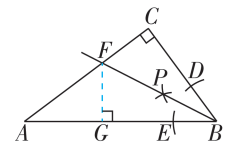
过点 C 作 $CM\perp AB$，$CN\perp BF$，根据等边对等角及平行线的性质，推出 ∠ABC = ∠CBF，进而得到 $CM=CN$，故 $S_{\triangle CBF}=S_{\triangle ACE}$，进而得到四边形 $EBFC$ 的面积等于△ABC 的面积. 设 $AM=x$，则 $MB=13-x$，利用勾股定理求出 CM 的长，再利用面积公式求出△ABC 的面积即可.



15. (1)【证明】∵ ∠$ACB=90°$，点 M 为边 AB 的中点，∴ $MC=MA=MB$，∴ ∠MCA = ∠A，∠MCB = ∠B. ∵ ∠$A=50°$，∴ ∠$MCA=50°$，∴ ∠MCB = ∠$B=40°$，∴ ∠EMC = ∠MCB+∠$B=80°$. ∵ ∠$ACE=30°$，∴ ∠MEC = ∠A+∠$ACE=80°$，∴ ∠MEC = ∠EMC，∴ $CE=CM$.

(2)【解】∵ $AB=4$，∴ $CE=CM=\frac{1}{2}AB=2$. ∵ $EF\perp AC$，∠$ACE=30°$，∴ $FE=\frac{1}{2}CE=1$. 由勾股定理得 $FC=\sqrt{EC^2-EF^2}=\sqrt{3}$.

16. $3\sqrt{5}$ 【解析】如图，过 F 作 $FG\perp AB$ 于 G. 由作图得 BF 平分 ∠ABC. ∵ $FG\perp AB$，∠$C=90°$，∴ $GF=CF=3$. 在 Rt△AFG 中，根据勾股定理得 $AG=\sqrt{AF^2-FG^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. ∵ 在 Rt△$CBF$ 与 Rt△GBF 中，$\begin{cases}FG=CF,\\BF=BF,\end{cases}$ ∴ Rt△CBF≌Rt△GBF(HL)，∴ $BG=BC$. 设 $BG=BC=x$，则 $AB=4+x$. 在 Rt△ABC 中，$AC=AF+CF=5+3=8$，根据勾股定理得 $AC^2+BC^2=AB^2$，即 $8^2+x^2=(4+x)^2$，解得 $x=6$，∴ $BC=6$. 在 Rt△BCF 中，根据勾股定理得 $BF=\sqrt{CF^2+BC^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$. 故答案为 $3\sqrt{5}$.



项目学习

主题探究(一) 探秘中国载人航天工程中的航天技术

刷实践

【解】(1) $v_1=\sqrt{gR}=\sqrt{6.4\times10^6\times9.8}\approx7.9\times10^3$(m/s).

(2) $v_2=\sqrt{2gR}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{gR}=\sqrt{2}v_1$，∴ 第二宇宙速度与第一宇宙速度的比值为$\sqrt{2}$.

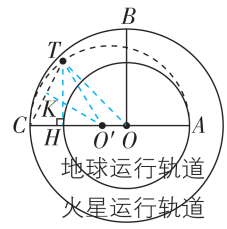
(3) ∵ 火星的公转周期(绕太阳逆时针转动一周所用时间)为 687 天，∠$AOB=90°$，

∴ 探测器从发射到抵达火星需要 $687\times\frac{1}{4}\approx172$(天).

关键点拨

(4) 由等面积法得到 $TH=\frac{CT\cdot O'K}{O'C}=1$ 是本题解题的关键.

(4) 设 CT 中点为 K，过 T 作 $TH\perp OC$ 于 H，连接 OT，$O'T$，$O'K$，如图.



∵ $OA=1$ A. U.，$OC=1.5$ A. U.，∴ $AC=2.5$ A. U.，∴ $O'C=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{4}$ A. U.. ∵ $O'T=O'C$，K 是 CT 中点，∴ $O'K\perp CT$，即 ∠$O'KC$ = ∠$O'KT=90°$. ∵ $CT=O'K$，∴ $O'K=2CK$. 在 Rt△$O'CK$ 中，CK^2+

$O'K^2=O'C^2$,

$\therefore CK^2+(2CK)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2$,$\therefore CK=\frac{\sqrt{5}}{4}$ A. U.,$\therefore O'K=2CK=\frac{\sqrt{5}}{2}$ A. U. $=CT$. $\because 2S_{\triangle O'CT}=CT\cdot O'K=O'C\cdot TH$,

$\therefore TH=\frac{CT\cdot O'K}{O'C}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{5}{4}}=1$ (A. U.),$\therefore CH=\sqrt{CT^2-TH^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-1^2}=\frac{1}{2}$(A. U.),$\therefore OH=OC-CH=1.5-\frac{1}{2}=1$(A. U.). 在 Rt$\triangle OTH$ 中,$OT=\sqrt{TH^2+OH^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$(A. U.),

$\therefore OT\div\frac{1}{30}=30\sqrt{2}\approx42$(h),$\therefore$ 最快 42 h 后,探测器会受到“等离子体云”的干扰.

主题探究(二)　最优设计方案

刷实践

【解】【基础任务】由题意得,不可栽种在地边上,当株距为 1 m 时,每行最多种 12 株,最多种 12 行,最大理论种植数量为 $12\times12=144$(株).

【进阶任务】由题意得可用种植区域边长为 $12-2\times0.8=10.4$(m),每株作物最小占地面积为 0.36 m^2,$(10.4)^2\div0.36\approx300$(株),所以最大理论种植数量为 300 株.

【类比应用】设最大理论种植数量为 n. 由题意得可用面积为$(12-1)\times(8-1)=77(m^2)$,最大理论种植数量 $n=77\div0.25=308$(株). 因为总预算为 2 000 元,所以 $800+3n\leqslant2\ 000$,解得 $n\leqslant400$. 综上,实际最多可种植数量为 308 株.

中考新考向备训

刷考向

1. C　**【解析】**由题意得 $3(x-1)=\frac{6\ 210}{x}$,故选 C.

2. 22.5　**【解析】**$\because$ 1 宣 $=\frac{1}{2}$矩,1 欘 $=1\frac{1}{2}$宣,1 矩 $=90°$,$\angle A=1$ 矩,$\angle B=1$ 欘,$\therefore \angle A=90°$,$\angle B=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times90°=67.5°$,$\therefore \angle C=90°-67.5°=22.5°$,故答案为 22.5.

3. C　**【解析】**观察各选项的图形可知,只有 C 选项的图形是轴对称图形,故选 C.

4. B　**【解析】**由示意图可知,$\triangle DOA$ 和$\triangle DBE$ 都是直角三角形,$\therefore \angle O+\angle ADO=90°$,$\angle DEB+\angle ADO=90°$,$\therefore \angle DEB=\angle O$,故选 B.

5. 8(答案不唯一)　**【解析】**$\because \sqrt{8m}$是整数,$\therefore 8m$ 为完全平方数,$\therefore$ 正整数 m 的值可以为 8,当 $m=8$ 时,$\sqrt{8m}=\sqrt{64}=8$,故答案为 8(答案不唯一).

6. $AD=CE$(答案不唯一)　**【解析】**$\because C$ 是 AB 的中点,$\therefore AC=BC$. $\because CD=BE$,$\therefore$ 添加 $AD=CE$ 或 $\angle ACD=\angle B$,可分别根据 SSS、SAS 判定$\triangle ACD\cong\triangle CBE$. 故答案为 $AD=CE$(答案不唯一).

7.【解】方案 1:因为每行有 n 个籽,行上相邻两籽的间距为 d,所以每行铲的路径长为$(n-1)d$. 因为每列有 k 个籽,呈交错规律排列,所以相当于该菠萝有 $2k$ 行籽,即共铲 $2k$ 行,所以铲除全部籽的路径总长为 $2(n-1)dk$. 故答案为$(n-1)d$,$2k$,$2(n-1)dk$.

方案 2:因为每列有 k 个籽,列上相邻两籽的间距为 d,所以每列铲的路径长为$(k-1)d$. 因为每行有 n 个籽,呈交错规律排列,所以相当于该菠萝有 $2n$ 列籽,即共铲 $2n$ 列,所以铲除全部籽的路径总长为 $2(k-1)dn$. 故答案为 $2(k-1)dn$.

方案 3:由题图(1)可得,斜着铲籽时每两个籽的间距为$\frac{\sqrt{d^2+d^2}}{2}=\frac{\sqrt{2}d}{2}$. 根据题意得一共有 $2n$ 列,$2k$ 行籽,所以斜着铲除全部籽的路径总长相当于 n 条线段长,每条线段上有 $2k$ 个籽,$(2k-1)$个间距,所以铲除全部籽的路径总长为$\frac{\sqrt{2}}{2}\times(2k-1)nd$.

解决问题　由上得 $2(n-1)dk-2(k-1)dn=2ndk-2dk-2ndk+2dn=2d(n-k)$,因为 $n>k\geqslant3$,$d>0$,所以 $2d(n-k)>0$,所以 $2(n-1)dk-2(k-1)dn>0$,所以方案 1 的铲籽路径总长大于方案 2 的铲籽路径总长;

$2(k-1)dn-\frac{\sqrt{2}}{2}\times(2k-1)dn=\left[(2-\sqrt{2})k-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]dn$,

因为 $n>k\geqslant3$,$d>0$,当 $k=3$ 时,$(2-\sqrt{2})\times3-2+\frac{\sqrt{2}}{2}=4-\frac{5\sqrt{2}}{2}>0$,所以 $2(k-1)dn-\frac{\sqrt{2}}{2}\times(2k-1)dn>0$,所以方案 2 铲籽路径总长大于方案 3 铲籽路径总长,所以方案 3 铲籽路径总长最短. 评价:销售员的操作方法是选择最短的铲籽路径,减少对菠萝的损耗(评价不唯一,言之有理即可).